108 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：四等考試
類 科：經建行政、交通技術
科 目：統計學概要

註：I. 對應右尾機率值 a 的標準常態分配臨界值 Z_a：

$z_{0.05}=1.645; z_{0.025}=1.96; z_{0.35}=0.385; z_{0.05}=-0.126$

Ⅱ. 對應自由度 df 且右尾機率值 a 的 t 分配臨界值 $t_a(df)$：

$t_{0.025}(3)=3.182; t_{0.05}(3)=2.353; t_{0.025}(4)=2.776; t_{0.05}(4)=2.132;$

$t_{0.025}(7)=2.365; t_{0.05}(7)=1.895; t_{0.025}(8)=2.306; t_{0.05}(8)=1.860;$

Ⅲ. 對應自由度 df 且累積機率值 a 的卡方分配臨界值 $X_a^2(df)$:

$\chi^2_{0.025}(7)=1.69; \chi^2_{0.05}(7)=2.167; \chi^2_{0.025}(8)=2.18; \chi^2_{0.05}(8)=2.733;$

$\chi^2_{0.975}(7)=16.013; \chi^2_{0.95}(7)=14.067; \chi^2_{0.975}(8)=17.535; \chi^2_{0.95}(8)=15.507$

所有假設檢定問題，皆需正確寫出虛無假設、對立假設、檢定統計量、拒絕域、檢定結果與結論。

一、假設隨機變數 X 之機率分配如下：(每小題 5 分，共 20 分)

x	1	2	3	4
f(x)	0.35	0.25	0.15	0.25

㈠試求 X 的期望值。

㈡試求 X 的標準差。

㈢試求機率 $P(X>2)$ 。

㈣令 $Y=X^2+2X+1$，則 Y 的期望值為何?

1.《考題難易》：★(最難 5 顆★)
2.《解題關鍵》：
求期望值和變異數, 基本題可拿分
3.《命中特區》：
吳迪（108.08），統計學，頁 3~8 至頁 3-9。

【擬答】

㈠ $E(X)=\sum xf(x)=1\times0.35+2\times0.25+3\times0.15+4\times0.25=2.3$

㈡ $E(X^2)=\sum x^2f(x)=1^2\times0.35+2^2\times0.25+3^2\times0.15+4^2\times0.25=6.7$

$Var(x)=E(X^2)-[E(X)]^2=6.7-2.3^2=1.41$

$\Rightarrow \sigma=\sqrt{1.41}=1.19$

㈢ $P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)=0.15+0.25=0.4$

㈣ $E(Y)=E(X^2+2X+1)=E(X^2)+2E(X)+1$

$=6.7+2\times2.3+1=12.3$

二、已知 10 個零件中有 2 個瑕疵，若任取 3 個來檢驗，求：(每小題 5 分，共 15 分)

㈠若採不歸還抽樣，則 3 個零件中有 1 個瑕疵之機率為多少？

㈡承題㈠，3 個零件中沒有瑕疵之機率為多少？

㈢若採歸還抽樣，則 3 個零件中至少有 1 個瑕疵之機率為多少？

1.《考題難易》：★(最難 5 顆★) *2.*《解題關鍵》： 二項分配與超幾何分配, 基本題可拿分 *3.*《命中特區》： 吳迪（108.08），統計學，頁 5~21 至頁 5-22。

【擬答】

㈠ X~HG(N=10, K=2, n=3)

r.v.X：瑕疵個數

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{C_x^2 C_{3-x}^8}{C_3^{10}}$，X=0、1、2

$\Rightarrow p(X=1)=\dfrac{C_1^2 C_2^8}{C_3^{10}}=\dfrac{56}{120}=\dfrac{7}{15}$

㈡ $p(X=0)=\dfrac{C_0^2 C_3^8}{C_3^{10}}=\dfrac{56}{120}=\dfrac{7}{15}$

㈢ X~b(n=3, p=0.2)

$\Rightarrow f(x)=C_X^3(0.2)^x(0.8)^{3-x}, X=0,1,2,3$

$\Rightarrow p(x\ge 1)=1-p(x=0)$

$=1\text{-}C_0^3(0.2)^0(0.8)^3=0.488$

三、下列是青少年對於所聽音樂類型喜好的意見調查：

音樂類型	調查的青少年數	喜愛該類型的青少年數
流行樂	400	204
饒舌樂	400	250

㈠請根據資料估計青少年喜歡流行樂的比例和喜歡饒舌樂的比例的差異。(5 分)

㈡在 0.05 顯著水準下，是否可推論青少年喜歡流行樂的比例和喜歡饒舌樂的比例有差異？(10 分)

1.《考題難易》：★(最難 5 顆★) *2.*《解題關鍵》： 母體比例 P 的檢定, 基本題可拿分 *3.*《命中特區》： 吳迪（108.08），統計學，頁 8~42 至頁 8-43。

【擬答】

㈠設喜歡流行樂之比例為 P_1

喜歡饒舌樂之比例為 P_2

$\Rightarrow \hat{P}_1=\dfrac{204}{400}=0.51$，$\hat{P}_2=\dfrac{250}{400}=0.625$

$\Rightarrow \hat{P}_1-\hat{P}_2=0.51-0.625=-0.115$

㈡ $\begin{cases} H_0: P_1=P_2 \\ H_1: P_1\neq P_2 \end{cases}$

$n_1=n_2=400$為大樣本，利用Z檢定

$\alpha=0.05\Rightarrow$ 拒絕域$C=|z|z>1.96$或$Z<\text{-}1.96$ }

$$\hat{p}=\frac{204+250}{400+400}=0.5675$$

檢定統計量

$$Z=\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(P_1-P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{P}\hat{q}}{n_2}}}=\frac{(-0.115)-0}{\sqrt{\frac{0.5675\times0.4325}{400}+\frac{0.5675\times0.4325}{400}}}$$

$$=-3.283\in C\Rightarrow R_eH_0$$

結論:有證據顯示青少年喜歡流行音樂比例和喜歡饒舌音樂的比例有差異

四、某公司產出手提袋的耐重強度呈常態分配，經試驗 8 次得強度分別如下：(單位：公斤)(每小題 10 分，共 20 分)

6.0、5.9、5.8、6.5、6.6、6.9、5.9、6.3

㈠在 0.05 顯著水準下，檢定母體平均強度是否超過 6 公斤。

㈡在 0.05 顯著水準下，檢定母體變異數是否為 0.3。

***1.*《考題難易》：★(最難 5 顆★)**
***2.*《解題關鍵》：**
母體平均數與變異數的檢定,基本題可拿分
***3.*《命中特區》：**
吳迪（108.08），統計學，頁 3~8 至頁 3-9。頁 8~28 至頁 8-29。

【擬答】

㈠ $\begin{cases}H_0:\mu\le 6\\ H_1:\mu>6\end{cases}$

$\overline{X}=6.2375, S^2=0.1598$

母體為常態，且σ^2未知，利用t檢定

$\alpha=0.05\Rightarrow$ 拒絕域$C=\{|t|\,t>2.365$或$t<-2.365\}$

檢定統計量

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{6.2375-6}{\frac{\sqrt{0.1598}}{\sqrt{8}}}=1.6804\notin C$$

$\Rightarrow$ not R_eH_o

結論:沒有證據顯示母體平均強度超過6公斤

㈡ $\begin{cases}H_0:\sigma^2=0.3\\ H_1:\sigma^2\ne 0.3\end{cases}$

μ未知，利用卡方檢定

$\alpha=0.05\Rightarrow$ 拒絕域$C=\{\chi^2|\chi^2>16.013$或$\chi^2<1.69\}$

檢定統計量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{(8-1)\times0.1598}{0.3}=3.7287\notin C$$

$\Rightarrow$ not R_eH_0

結論:沒有證據顯示母體變異數不為0.3

五、市場研究員為探討廠商投入的廣告費(X)對銷售額(Y)之影響，乃建立迴歸模型：$Y=\beta_0+\beta_1X+\varepsilon$。今隨機抽取 5 家廠商，得其廣告費與銷售額的關係如表所述：(單位：百萬元)(每小題 10 分，共 30 分)

	廠商 1	廠商 2	廠商 3	廠商 4	廠商 5
廣告費 X	12	15	8	10	8
銷售額 Y	7	12	4	6	5

㈠試求廣告費與銷售額之相關係數。

㈡試用最小平方估計法(least squares method)求出 Y 對 X 的直線迴歸係數的估計值 b_0和b_1。

㈢在 0.05 的顯著水準下檢定此迴歸線是否顯著。

1.**《考題難易》：★(最難 5 顆★)**
2.**《解題關鍵》：**
簡單迴歸與相關分析,基本題可拿分
3.**《命中特區》：**
吳迪（108.08），統計學，頁 10~17 至頁 10-19。

【擬答】

㈠

$$\sum X=53,\sum X^2=597,\sum Y=34,\sum Y^2=270$$

$$\sum XY=396$$

$$r=\frac{\sum XY-\frac{(\sum X)(\sum Y)}{n}}{\sqrt{\sum X_2-\frac{(\sum x)^2}{n}}\sqrt{\sum Y^2-\frac{(\sum Y)^2}{n}}}$$

$$=\frac{396-\frac{53\times 34}{5}}{\sqrt{597-\frac{53^2}{5}}\sqrt{270-\frac{34^2}{5}}}=0.9633$$

㈡

$$b_1=\frac{SSxy}{SSx}=\frac{\sum xy-\frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum X^2-\frac{(\sum X)^2}{n}}=\frac{396-\frac{53\times 34}{5}}{597-\frac{53^2}{5}}=1.0114$$

$$b_o=\overline{Y}-b_1\overline{X}=\frac{34}{5}-1.0114\times\frac{53}{5}=-3.92084$$

㈢

$$\begin{cases}H_0:\beta_1=0\\H_1:\beta_1\neq 0\end{cases}$$

$\alpha=0.05\Rightarrow$ 拒絕域$C=\{t\,|\,t>3.182$或$<-3.182\}$

檢定統計量

$$t=\frac{b_1-\beta_1}{\sqrt{\frac{MSE}{SSx}}}=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{0.9633\sqrt{5-2}}{\sqrt{1-0.9633^2}}$$

$$=6.2158\in C\Rightarrow R_eH_o$$

結論:有證據顯示此迴歸線達顯著水準