

108 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試

類 科：經建行政、農業行政、交通技術

科 目：統計

一、以下是關於條件機率以及指數分配(exponential distribution)的問題。(每小題 10 分，共 20 分)

(一)一政府官員在 5 個治安情形不同的國家洽公，假定此政府官員的行程如下：A 國→B 國→C 國→D 國→E 國。如果各國錢包被偷的機率是 A 國為 0.02，B 國為 0.03，C 國為 0.07，D 國為 0.01。已知此官員抵達 E 國時，錢包已被偷(非在 E 國被偷)，請問此官員其錢包在 C 國被偷的機率為何？

(二)一辦公室在 A 地之政府官員要到 B 地開會，此官員必須先從辦公室走路 9 分鐘至一公車站，然後坐上公車直達 B 地開會地點。已知在此公車站其任一公車之間隔到達時間服從一平均值 20(分鐘)的指數分配(exponential distribution)，其中公車之間隔到達時間是指從這班車離開之時間算起到下一班車到達所需等待之時間。若此官員要不晚於上午 10 點 40 分坐上公車，開會才不會遲到。請問此官員最晚應在什麼時間從辦公室出發，才会有至少 0.9 的機率不會遲到(答案請計算至分鐘單位; $\log(a)$ 為數字 a 的自然對數值， $\log(2)=0.69$ ， $\log(3)=1.1$ ， $\log(10)=2.3$ ， $\log(13)=2.56$)。

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★

2. 《破題關鍵》指數分配基本題，應可拿分

【擬答】

(一)設 A、B、C、D 分別為此官員在 A 國、B 國、C 國、D 國錢包被偷的事件

$$P(A)=0.02$$

$$P(B)=0.98 \times 0.03 = 0.0294$$

$$P(C)=0.98 \times 0.97 \times 0.07 = 0.066542$$

$$P(D)=0.98 \times 0.97 \times 0.93 \times 0.01 = 0.00884058$$

$$\Rightarrow P(C|\text{錢包被偷}) = \frac{0.066542}{0.02 + 0.0294 + 0.066542 + 0.00884058}$$

$$= 0.5333$$

(二) $X \sim \exp(\lambda)$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{1}{\lambda} = 20 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}x}, x > 0$$

$$\Rightarrow p(x < a) \geq 0.9$$

$$\Rightarrow \int_0^a \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}x} dx \geq 0.9$$

$$\Rightarrow -e^{-\frac{1}{20}x} \Big|_0^a \geq 0.9$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-\frac{a}{20}} \geq 0.9 \Rightarrow a \leq 46$$

$$\Rightarrow 46 + 9 = 55 \text{ 分}$$

所以官員最晚應於 9 點 45 分從辦公室出發

二、以下是關於最大概似估計量 (maximum likelihood estimator) 以及假設檢定的問題。(每小題 10 分, 共 20 分)

(一)考慮以下離散型機率分配函數 (discrete probability distribution function)

$$f(x) = \begin{cases} (\theta^2 + 3) \left(\frac{1}{\theta^2 + c^2} \right)^x, & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 是參數而 c 是欲求的數。一組服從上述機率分配的母體所得到的一組隨機樣本如下：

1	3	1	2	4	1
---	---	---	---	---	---

請計算 c 的可能值以及根據此組樣本所得之參數 θ 的最大概似估計量的值。

(二)某電競遊戲設計為共 4 道關卡的闖關遊戲, 假定 X 為通過關卡數的隨機變數且其分配是一個成功機率為 p 的二項式分配 (binomial distribution), 其中 X 的可能值為 0, 1, 2, 3, 4。針對以下假設 $H_0: p = \frac{1}{2}$ 對 $H_1: p = \frac{1}{4}$, 給定以下 4 種檢定法：

檢定法 A: 如果 $X=4$, 則拒絕 H_0 。反之則不拒絕 H_0 , 即拒絕域 (rejection region) 為集合 $\{4\}$;

檢定法 B: 如果 $X=0$, 則拒絕 H_0 。反之則不拒絕 H_0 , 即拒絕域為集合 $\{0\}$;

檢定法 C: 如果 $X \leq 1$, 則拒絕 H_0 。反之則不拒絕 H_0 , 即拒絕域為集合 $\{0, 1\}$;

檢定法 D: 如果 $X=0$ 或 $X=4$, 則拒絕 H_0 。反之則不拒絕 H_0 , 即拒絕域為集合 $\{0, 4\}$;

設定顯著水準 $\alpha = \frac{1}{16}$, 請決定上述 4 種檢定法, 那一個或那些檢定法試符合 α 之設定且有最大檢定力 (power) 的檢定法?

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★

2. 《破題關鍵》

考 MLE 及最強力檢定, 重要題型, 若有了解其意義應可拿分

【擬答】

$$\Rightarrow 1. \sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow (\theta^2 + 3) \left(\frac{1}{\theta^2 + c^2} \right) + (\theta^2 + 3) \left(\frac{1}{\theta^2 + c^2} \right)^2 + \dots = 1$$

$$\Rightarrow (\theta^2 + 3) \left(\frac{\frac{1}{\theta^2 + C^2}}{1 - \frac{1}{\theta^2 + C^2}} \right) = 1$$

$$\Rightarrow (\theta^2 + 3) \left(\frac{1}{\theta^2 + C^2 - 1} \right) = 1 \Rightarrow C^2 = 4 \Rightarrow C = \pm 2$$

$$2. (x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{iid}{\sim} f(x)$$

$$\Rightarrow L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = (\theta^2 + 3)^n \left(\frac{1}{\theta^2 + 4} \right)^{\sum_{i=1}^n x_i}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ell_n L(\theta) &= \ell_n \left[(\theta^2 + 3)^n (\theta^2 + 4)^{-\sum_{i=1}^n x_i} \right] \\ &= n \ell_n (\theta^2 + 3) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ell_n (\theta^2 + 4) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ell_n L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{2n\theta}{\theta^2 + 3} - \frac{2\theta \sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2 + 4} = 0$$

$$\frac{2\theta(n\theta^2 + 4n - \theta^2 \sum_{i=1}^n x_i - 3 \sum_{i=1}^n x_i)}{(\theta^2 + 3)(\theta^2 + 4)} = 0$$

$$\Rightarrow \theta^2 = \frac{3\bar{x} - 4}{1 - \bar{x}} \text{ 或 } \theta = 0$$

$$\text{且 } \frac{\partial^2 \ell_n L(\theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta^2 = \frac{3\bar{x} - 4}{1 - \bar{x}}} < 0$$

$$\text{又 } \bar{x} = \frac{1+3+1+2+4+1}{6} = 2 \text{ 代入}$$

$$\hat{\theta}_{MLE}^2 = \frac{3 \times 2 - 4}{1 - 2} = -2$$

$$\text{由 MLE 的固定性} \Rightarrow \hat{\theta}_{MLE} = \sqrt{-2}$$

所以 MLE 不存在

$$(二) X \sim b(n=4, p)$$

$$f(x) = c_x^4 p^x (1-p)^{4-x}, x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\text{又 } \alpha = p(\text{Re } H_0 | H_0 \text{ 為真})$$

$$\text{power} = 1 - \beta = p(\text{Re } H_0 | \text{為假})$$

1. 檢定法 A :

$$\alpha = p(x=4 | p = \frac{1}{2}) = c_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

$$power = p(x=0 | p = \frac{1}{4}) = c_0^4 (\frac{1}{4})^0 (\frac{3}{4})^4 = \frac{1}{256}$$

2. 檢定法 B :

$$\alpha = p(x=0 | p = \frac{1}{2}) = c_0^4 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$$

$$power = p(x=0 | p = \frac{1}{4}) = c_0^4 (\frac{1}{4})^0 (\frac{3}{4})^4 = \frac{81}{256}$$

3. 檢定法 C :

$$\alpha = p(x \leq 1 | p = \frac{1}{2}) = c_0^4 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^4 + c_1^4 (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{16}$$

$$power = p(x \leq 1 | p = \frac{1}{4}) = c_0^4 (\frac{1}{4})^0 (\frac{3}{4})^4 + c_1^4 (\frac{1}{4})^1 (\frac{3}{4})^3 = \frac{189}{256}$$

4. 檢定法 D :

$$\alpha = p(x=0.4 | p = \frac{1}{2}) = c_0^4 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^4 + c_4^4 (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{8}$$

$$power = p(x=0.4 | p = \frac{1}{4}) = c_0^4 (\frac{1}{4})^0 (\frac{3}{4})^4 + c_4^4 (\frac{1}{4})^4 (\frac{3}{4})^0 = \frac{41}{128}$$

由以上得檢定法 A 和 B 型 I 錯誤機率沒有超過顯著水準 $\alpha = \frac{1}{16}$,

但檢定法 B 的檢定力大於檢定法 A , 所以檢定法 B 為最強力檢定 (MPT)

三、以下是關於朴松分配 (Poisson distribution) 以及二項式分配 (distribution) 的參數估計問題。

(一)若某一速食一日來客人數服從於平均值為 λ (人) 的朴松分配 (Poisson distribution) , 以下是隨機收集該速食店 5 日的每日來客人數資料: 433 人、375 人、450 人、375 人、367 人。

根據上述資料, 請算出 $\sqrt{\lambda}$ 的最大概似估計量 (maximum likelihood estimator) 的值。(5 分)

(二)若隨機變數 $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ 是彼此獨立且其分配為做一次試驗且成功機率為 0.2 的二項式分

配 (binomial distribution) 。請算出 $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2}{9}$ 的期望值 $E(S^2)$ 以及 $\sum_{i=1}^{10} X_i^2$ 的變異數

$\text{Var}(\sum_{i=1}^{10} X_i^2)$, 其中 $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$ 。(10 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★

2. 《破題關鍵》

Poisson 分配及二項分配的基本題, 應可拿分

【擬答】

(一) $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, 且 $\hat{\lambda}_{\text{MLE}} = \bar{X}$

$$\text{其中 } \bar{X} = \frac{433 + 375 + 450 + 375 + 367}{5} = 400$$

又 MLE 具有固定性

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} \text{ 的 MLE} = \sqrt{\bar{x}} = \sqrt{400} = 20$$

$$(二) (X_1, X_2, \dots, X_{10}) \stackrel{iid}{\sim} \text{Ber}(P=0.2)$$

$$\Rightarrow E(X)=p, \text{Var}(X)=pq$$

$$1. E(S^2) = \sigma^2 = pq = 0.2 \times 0.8 = 0.16$$

$$\begin{aligned} 2. \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2\right) &= \sum_{i=1}^{10} [\text{Var}(X_i^2)] \\ &= \sum_{i=1}^{10} [E(X_i^4) - (E(X_i^2))^2] \\ &= 10[0.2 - (0.2)^2] = 1.6 \end{aligned}$$

四、以下關於卡方檢定 (chi-squared test) 以及單因子變異數分析法 (one-way ANOVA) 的問題。(每小題 10 分，共 20 分)

(一) 在一次有 3 位總統候選人的總統大選，某電視名嘴宣稱候選人甲的支持率為 $p_1=0.425$ ，候選人乙的支持率為 $p_2=0.235$ ，候選人丙的支持率為 $p_3=0.115$ ，而不表態或都不支持這 3 位候選人的比率為 $p_4=0.225$ 。某一民調單位得到以下樣本數為 1000 的問卷結果：支持候選人甲的人數為 450 人，支持候選人乙的人數為 225 人，支持候選人丙的人數為 125 人，不表態或者都不支持這 3 位候選人的人數為 200 人。根據這份問卷，在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，請利用卡方檢定 (chi-squared test) 來驗證此名嘴的說法是否與該民調單位調查結果一致，即檢定對

$$H_0: p_1=0.425, p_2=0.235, p_3=0.115, p_4=0.225$$

$$H_1: p_1, p_2, p_3 \text{ 以及 } p_4 \text{ 並非}$$

$$p_1=0.425, p_2=0.235, p_3=0.115, p_4=0.225。$$

(二) 一機械零件生產公司欲比較其 3 條生產線所生產之零件的平均規格(分別為 μ_1, μ_2 以及 μ_3) 是否一致。此公司在每一條生產線各取得 5 件隨機樣本，這 3 組樣本其規格之平均值分別為 3.6, 3.4 以及 4.1。另外，這總共 15 件零件其規格之變異數為 0.14。在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，請利用單因子變異數分析法 (one-way ANOVA) 來檢定這三條生產線所生產零件的平均規格是否一致，即檢定 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 對 $H_1: \mu_1, \mu_2$ 以及 μ_3 並不完全相等。

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★

2. 《破題關鍵》

卡方分配及變異數分析的基本題，應可拿分

【擬答】

$$(一) \begin{cases} H_0: P_1 = 0.425, P_2 = 0.235, P_3 = 0.115, P_4 = 0.225 \\ H_1: P_1, P_2, P_3, P_4 \text{ 並非 } H_0 \text{ 之值} \end{cases}$$

	甲	乙	丙	其他
O_i	450	225	125	200
P_i	0.425	0.235	0.115	0.225
e_i	425	235	115	225

$$\alpha = 0.05$$

$$\text{拒絕域 } C = \{\chi^2 \mid \chi^2 > \chi_{0.05}^2(3) = 7.81473\}$$

檢定統計量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(450 - 425)^2}{425} + \dots + \frac{(200 - 225)^2}{225}$$

$$= 5.543 \notin C \Rightarrow \text{not Re } H_0$$

結論：沒有證據顯示名嘴的說法與民調單位調查結果不一致

$$(\Rightarrow) \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_1: \mu_i \text{ 不全相等} \end{cases}$$

$$k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 5, N = 15, \bar{x}_{..} = 3.7$$

$$SST = (N-1)S^2 = (15-1) \times 0.14 = 1.96$$

$$SSTR = \sum n_i (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2$$

$$= 5(3.6 - 3.7)^2 + 5(3.4 - 3.7)^2 + 5(4.1 - 3.7)^2 = 1.3$$

$$SSE = SST - SSTR = 0.66$$

ANOVA 表

來源	SS	df	MS	F 值
組間	1.3	2	0.65	F=11.818
組內	0.66	12	0.055	
總變異	1.96	14		

$$\alpha = 0.05$$

$$\text{拒絕域 } C = \{F \mid F > F_{0.05}(2, 12) = 3.8853\}$$

$$F = 11.818 > 3.8853 \in C \Rightarrow \text{Re } H_0$$

結論：有證據顯示 3 條生產線所生產之零件平均規格不一致

五、以下是關於無母數統計以及母體平均與比率的問題。

(一)對以下來自可能非常態分配母體且樣本數少的隨機樣本

14	18	23	25	32	48	11
----	----	----	----	----	----	----

當使用威爾考森符號等級檢定法 (Wilcoxon signed rank test) 來檢定母體中位數 M 是否為 20，即檢定 $H_0: M=20$ 對 $H_1: M \neq 20$ ，請算出分別對應正負符號的兩檢定統計量。(5 分)

(二)某收視率調查公司對某電視節目收視率 p 進行調查，該公司做出兩份利用隨機抽樣所得之收視率報告，其中一份樣本數為 400，而另一份樣本數為 1600，且兩份報告所得之估計收視率相同且都不超過 30%，其中估計收視率即樣本中收看此節目觀眾數占樣本數之比率，也就是樣本比率 (sample proportion)。而兩份報告關於收視率 p 的兩個 95%信賴區間，其中較長的信賴區間比另一信賴區間長度長 0.0294。試求這兩份報告所得之估計收視率以及收視率 p 的兩個 95%信賴區間。(10 分)

(三)市售某品牌防彈咖啡號稱喝一個月後有減重效果。若 μ_2 是喝此防彈咖啡一個月後消費者之平均體重，而 μ_1 是這些消費者喝之前之平均體重，從這些防彈咖啡的消費者，隨機得到以下 6 組成對樣本 (paired samples or matched samples) 資料

(x_1, y_1) $= (63, 61)$	(x_2, y_2) $= (69, 67)$	(x_3, y_3) $= (59, 60)$	(x_4, y_4) $= (57, 58)$	(x_5, y_5) $= (76, 70)$	(x_6, y_6) $= (63, 59)$
------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------

其中 x_i 為第 i 個消費者喝此防彈咖啡前所測之體重，而 y_i 為這個消費者喝了此防彈咖啡一個月後所測之體重， $i=1, \dots, 6$ 。在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，請利用成對樣本 t 檢定法 (paired samples t test or matched samples t test) 決定是否有足夠證據顯示此防彈咖啡有該公司宣稱的減重效果，即檢定 $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ 對 $H_1: \mu_1 > \mu_2$ 。(10 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★

2. 《破題關鍵》

無母數統計及比例 p 的信賴區間及相依樣本 t 檢定，基本題應可拿分

【擬答】

$$(\text{一}) \begin{cases} H_0: M = 20 \\ H_1: M \neq 20 \end{cases}$$

X	14	18	23	25	32	48	11
D=X-M	-6	-2	3	5	12	28	-9
D	6	2	3	5	12	28	9
rank	4	1	2	3	6	7	5

$$W^+ = 2+3+6+7=18$$

$$W^- = 4+1+5=10$$

(二)

$$e_1 = 1.96 \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{400}} = 0.098 \sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}$$

$$e_2 = 1.96 \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{1600}} = 0.049 \sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}$$

$$\text{且 } e_1 - e_2 = \frac{0.0294}{2} = 0.0147$$

$$\Rightarrow 0.098 \sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})} - 0.049 \sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})} = 0.0147$$

$$\Rightarrow \hat{P} = 0.1$$

$\therefore P$ 的兩個 95% 信賴區間分別為

(0.0706, 0.1294) 和 (0.0853, 0.1147)

$$(\text{三}) \begin{cases} H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

X	63	69	59	57	76	63
Y	61	67	60	58	70	59
D=X-Y	2	2	-1	-1	6	4

$$\bar{D} = 2, S_D^2 = 7.6$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\text{拒絕域 } C = \{t \mid t > 2.571 \text{ 或 } t < -2.571\}$$

檢定統計量

$$t = \frac{\bar{D} - M_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} = \frac{2 - 0}{\frac{\sqrt{7.6}}{\sqrt{6}}} = 1.777 \notin C \Rightarrow \text{not Re Ho}$$

結論：沒有證據顯示此防彈咖啡有該公司宣稱的減重效果

公
職
王

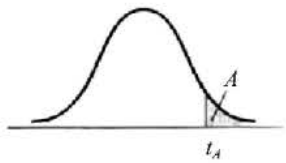
Areas under the Normal Curve

Example:
If $z = 1.96$, then
 $P(0 \text{ to } z) = 0.4750$.



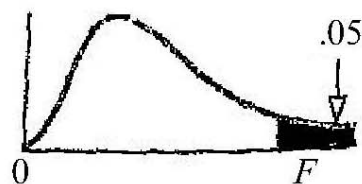
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990



Critical Values of the Student t Distribution

Degrees of Freedom	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
45	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
55	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
65	1.295	1.669	1.997	2.385	2.654
70	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
75	1.293	1.665	1.992	2.377	2.643
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
85	1.292	1.663	1.988	2.371	2.635
90	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
95	1.291	1.661	1.985	2.366	2.629
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
110	1.289	1.659	1.982	2.361	2.621
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
130	1.288	1.657	1.978	2.355	2.614
140	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611
150	1.287	1.655	1.976	2.351	2.609
160	1.287	1.654	1.975	2.350	2.607
170	1.287	1.654	1.974	2.348	2.605
180	1.286	1.653	1.973	2.347	2.603
190	1.286	1.653	1.973	2.346	2.602
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Critical Values of the F Distribution
at a 5 Percent Level of Significance

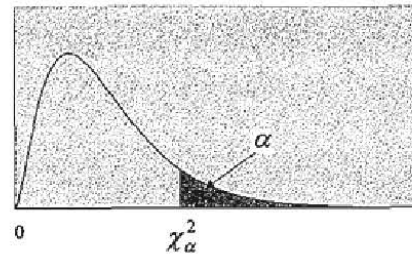


Degrees of Freedom for the Denominator

	Degrees of Freedom for the Numerator															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39

卡方分配臨界值表

$$P(\chi^2 > \chi_\alpha^2) = \alpha$$



d.f.	$\chi_{0.995}^2$	$\chi_{0.975}^2$	$\chi_{0.950}^2$	$\chi_{0.900}^2$	$\chi_{0.100}^2$	$\chi_{0.050}^2$	$\chi_{0.025}^2$	$\chi_{0.010}^2$
1	0.0000393	0.0009821	0.0039322	0.0157907	2.705541	3.841455	5.023903	6.634891
2	0.0100247	0.0506357	0.1025862	0.2107208	4.605176	5.991476	7.377779	9.210351
3	0.0717235	0.2157949	0.3518460	0.5843755	6.251394	7.814725	9.348404	11.3449
4	0.206984	0.484419	0.710724	1.063624	7.779434	9.487728	11.1433	13.2767
5	0.411751	0.831209	1.145477	1.610309	9.236349	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.675733	1.237342	1.635380	2.204130	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	0.989251	1.689864	2.167349	2.833105	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.344403	2.179725	2.732633	3.489537	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	1.734911	2.700389	3.325115	4.168156	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.155845	3.246963	3.940295	4.865178	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	2.603202	3.815742	4.574809	5.577788	17.2750	19.6752	21.9200	24.7250
12	3.073785	4.403778	5.226028	6.303796	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	3.565042	5.008738	5.891861	7.041500	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.074659	5.628724	6.570632	7.789538	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	4.600874	6.262123	7.260935	8.546753	22.3071	24.9958	27.4884	30.5780
16	5.142164	6.907664	7.961639	9.312235	23.5418	26.2962	28.8453	31.9999
17	5.697274	7.564179	8.671754	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	6.264766	8.230737	9.390448	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8052
19	6.843923	8.906514	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908
20	7.433811	9.590772	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5663
21	8.033602	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	8.642681	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9245	36.7807	40.2894
23	9.260383	11.6885	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6383
24	9.886199	12.4011	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	10.5196	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3140
26	11.1602	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9231	45.6416
27	11.8077	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9628
28	12.4613	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3372	44.4608	48.2782
29	13.1211	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5569	45.7223	49.5878
30	13.7867	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
40	20.7066	24.4331	26.5093	29.0505	51.8050	55.7585	59.3417	63.6908
50	27.9908	32.3574	34.7642	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1538
60	35.5344	40.4817	43.1880	46.4589	74.3970	79.0820	83.2977	88.3794
80	51.1719	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.879	106.629	112.329
100	67.3275	74.2219	77.9294	82.3581	118.498	124.342	129.561	135.807