

108 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等別：三等考試

類科：電子工程

科目：電磁學

一、如圖所示，將一個半徑為 a 的金屬球置於一個半徑為 b 的金屬球($b > a$)內部，兩球的球心重疊。假設內金屬球的電位為 V_0 ，內金屬球上的總電荷為 Q ，外金屬球的電位為 0，兩金屬球之間填充介電係數為 ϵ_1 的介電質。

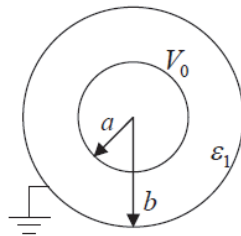
(一)推導兩金屬球間的電場分佈表示式。(5 分)

(二)推導兩金屬球間的電位分佈表示式。(5 分)

(三)將 Q 表達為 V_0 、 ϵ_1 、 a 及 b 的函數。(5 分)

(四)推導外金屬球內側的電荷密度表示式。(5 分)

(五)推導兩金屬球間的電容表示式。(5 分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》(★：非常簡單 / ★★：簡單 / ★★★：普通 / ★★★★：困難 / ★★★★★：非常困難)

★★

2. 《解題關鍵》

使用 Laplace equation 求解電位分佈後，利用 $V \rightarrow \vec{E} \rightarrow Q \rightarrow C = \frac{Q}{V_0}$ 即可全部求出

【擬答】

$$\nabla^2 V = 0 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) = 0 \Rightarrow V(R) = \frac{C_1}{R} + C_2$$

(一)

邊界條件 $V(a) = V_0$; $V(b) = 0$ 代入可得

$$V(a) = V_0 \Rightarrow \frac{C_1}{a} + C_2 = V_0 \text{ ----(1)}$$

$$V(b) = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{b} + C_2 = 0 \text{ -----(2)}$$

$$C_1 = \frac{V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{abV_0}{b-a}; C_2 = \frac{aV_0}{a-b}$$

$$\text{所以 } V(R) = \frac{aV_0}{b-a} \left(\frac{b}{R} - 1 \right) \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial R} \hat{a}_R = \frac{aV_0}{b-a} \frac{b}{R^2} \hat{a}_R$$

$$(二) \quad V(R) = \frac{aV_0}{b-a} \left(\frac{b}{R} - 1 \right)$$

$$\rho_s|_{R=a} = \vec{D} \cdot \hat{a}_R|_{R=a} = \frac{bV_0\epsilon_1}{a(b-a)}$$

(三)內金屬球面電荷密度

$$Q = \int_S \rho_s dS = 4\pi a^2 \times \frac{bV_0\epsilon_1}{a(b-a)} = \frac{4\pi\epsilon_1 V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$\rho_s|_{R=b} = \vec{D} \cdot (-\hat{a}_R)|_{R=b} = -\frac{aV_0\epsilon_1}{b(b-a)}$$

(四)外金屬球面電荷密度

$$(五)兩金屬球間的電容為 C = \frac{Q}{V_0} = \frac{4\pi\epsilon_1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

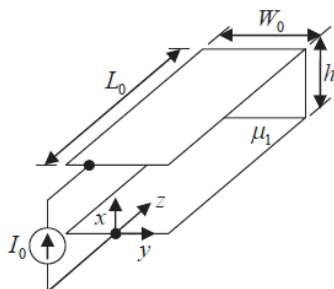
二、一片厚度為 h 之磁性材料(導磁係數為 μ_1)置於兩片平行金屬板之間，兩片金屬板長度為 L_0 、寬度為 W_0 ，並於 $z=L_0$ 處以第三片金屬板相連。兩片平行金屬板於 $z=0$ 處分別接到一直流電流源之兩端，電流源之電流為 I_0 。假定金屬板上的電流密度均勻，金屬板之間的磁場也均勻。

(一)列出兩片平行金屬板內側的電流密度表示式。(6 分)

(二)列出金屬板之間的磁場表示式。(6 分)

(三)列出金屬板之間的總磁通量表示式。(6 分)

(四)推導此一金屬板包夾磁性材料結構的電感表示式。(7 分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》(★：非常簡單 / ★★：簡單 / ★★★：普通 / ★★★★：困難 / ★★★★★：非常困難)

★★★

2. 《解題關鍵》

解題自 $I \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow \Phi \rightarrow L$ 即可求出

【擬答】

$$(一) \vec{J} = \frac{I_0}{hW_0} (-\hat{x})$$

$$(二) \vec{H} = \frac{I}{2W_0} (-\hat{y})$$

$$(三) \vec{B} = \mu_1 \vec{H} = \frac{\mu_1 I}{2W_0} (-\hat{y})$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_1 h L_0}{2W_0}$$

總磁通量

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_1 h L_0}{2W_0}$$

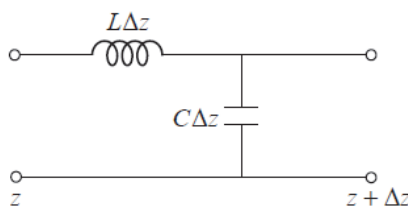
(四) 電感

三、如圖所示，一段長度為 Δz 的傳輸線的等效電路，其單位長度的電容為 C 、單位長度的電感為 L ，電壓分佈為 $V(z, t)$ 、電流分佈為 $I(z, t)$ 。

(一)請應用 Kirchhoff 電壓定律及電流定律推導 $V(z, t)$ 及 $I(z, t)$ 的一階聯立方程式。(10 分)

(二)求解上述聯立方程式推導出 $V(z, t)$ 及 $I(z, t)$ 各自滿足的二階波動方程式。(10 分)

(三)列出 $V(z, t)$ 的通解，並代入一階聯立方程式得出 $I(z, t)$ 對應的表示式。(5 分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》(★：非常簡單 / ★★：簡單 / ★★★：普通 / ★★★★：困難 / ★★★★★：非常困難)

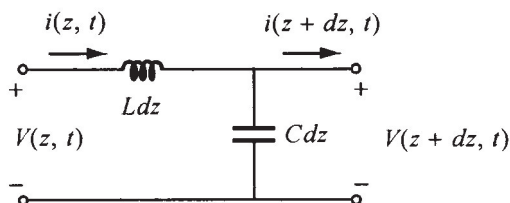
★★★

2. 《解題關鍵》

熟悉傳輸線方程式的推導與證明

【擬答】

(一)如圖所示



根據 KVL ,
$$V(z, t) - V(z + \Delta z, t) = L\Delta z \frac{di(z, t)}{dt}$$

根據 KCL ,
$$i(z, t) - i(z + \Delta z, t) = C\Delta z \frac{dV(z, t)}{dt}$$

(二)上面二式同除以 dz

$$-\frac{dV(z, t)}{dz} = L \frac{di(z, t)}{dt}$$

$$-\frac{di(z, t)}{dz} = C \frac{dV(z, t)}{dt}$$

改成相量(phasor)

$$-\frac{dV(z)}{dt} = j\omega LI(z) \text{---(1)}$$

$$-\frac{dI(z)}{dt} = j\omega CV(z) \text{---(2)}$$

$$-\frac{di(z,t)}{dt} = C \frac{dV(z,t)}{dt}$$

解聯立可得

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} + \omega^2 LCV(z) = 0$$

$$\frac{d^2 I(z)}{dz^2} + \omega^2 LCI(z) = 0$$

(三) 定義 $\beta = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+j\beta z}$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-j\beta z} + I_0^- e^{+j\beta z}$$

代入(1)式可得

$$-\frac{d}{dz}(V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+j\beta z}) = j\beta V_0^+ e^{-j\beta z} - j\beta V_0^- e^{+j\beta z} = j\omega L(I_0^+ e^{-j\beta z} + I_0^- e^{+j\beta z})$$

比較係數可得 $\frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \frac{\omega L}{\beta} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_0$

因此電壓與電流可表示成

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}(V_0^+ e^{-j\beta z} - V_0^- e^{+j\beta z})$$

四、如圖所示，兩片平行金屬板構成一個導波管，兩片金屬板間填充介電係數為 ϵ_1 、導磁係數為 μ_0 的介電質。假設導波管內部的電場為 $\vec{E} = \hat{y}E_0 e^{j(\omega t - k_0 z)}$ 。

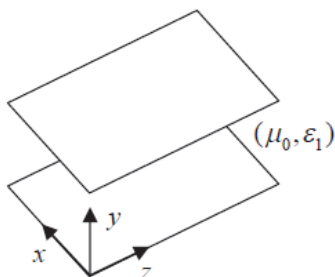
(一) 將電場代入 Faraday's law，推導出導波管內部的磁場表示式。(5 分)

(二) 列出電場振幅與磁場振幅的比值。(5 分)

(三) 列出兩片平行金屬板內側的電流密度表示式。(5 分)

(四) 列出兩片平行金屬板內側的電荷密度表示式。(5 分)

(五) 列出功率密度 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$ 表示式。(5 分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》(★：非常簡單 / ★★：簡單 / ★★★：普通 / ★★★★：困難 / ★★★★★：非常困難)

★★★

2. 《解題關鍵》

熟悉均勻平面波下的 Maxwell 方程式解法即可求出

【擬答】

(一)若波假設為+z 之方向： $E_0^+(z, t) = \text{Re}[E_0 e^{-jk_0 z} \cdot e^{j\omega t}] = E_0 \cos(\omega t - k_0 z)$

$$\vec{E} = \hat{y} E_y^+(z), \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu(\hat{x}H_x^+ + \hat{y}H_y^+ + \hat{z}H_z^+)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left(\nabla \times \vec{E} \right) = -\frac{1}{j\omega\mu} \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0 e^{-jk_0 z} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow H_y^+ = H_z^+ = 0, H_x^+(z) = -\frac{1}{j\omega\mu} \cdot (-jk)E_y(z) = \frac{1}{\eta} E_y(z)$$

$$\text{其中 } \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}}$$

$$\text{所以 } \vec{H} = \hat{x} \frac{E_0}{\eta} e^{j(\omega t - k_0 z)}$$

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}}$$

(二)因此

$$(三) \vec{J}_s = \hat{a}_n \times \vec{H} = \hat{a}_z \times \left(\hat{x} \frac{E_0}{\eta} e^{j(\omega t - k_0 z)} \right) = \hat{y} \frac{E_0}{\eta} e^{j(\omega t - k_0 z)}$$

$$(四) \rho = \nabla \cdot \vec{D} = \epsilon_1 \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_1 \nabla \cdot \left(\hat{y} E_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \right) = 0$$

$$(五) \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* = \left(\hat{y} E_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \right) \times \left(\hat{x} \frac{E_0}{\eta} e^{-j(\omega t - k_0 z)} \right) = -\hat{z} \frac{E_0^2}{\eta}$$