108年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　別：三等考試
類　科：電力工程、電子工程
科　目：工程數學

甲、申論題部分：（50 分）

一、求通解(general solution)為 $c_1e^x + c_2xe^x + x^2e^x$ 的二次微分方程式，其中 c_1 及 c_2 為任意常數。(10 分)

【解題關鍵】
1.《考題難易》：★ 非常簡單
2.《解題關鍵》：二階常微分方程式基本題，應可拿分

【擬答】

$y_h = c_1e^x + c_2xe^x$

則 $\lambda=1,1$

$\rightarrow(\lambda-1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

設 $y'' - 2y' + y = Ae^x$

$$\rightarrow y_p = \frac{1}{(D-1)^2}Ae^x$$

$$=e^x\frac{1}{D^2}A = e^x\left(\frac{A}{2}x^2\right) = x^2e^x$$

$\rightarrow A=2$

∴二次微分方程式為 $y'' - 2y' + y = 2e^x$

二、求週期為 $2T$ 的函數，$f(x)=\begin{cases}\cos(\pi x/T), & 0\le x<T\\ 0, & T\le x<2T\end{cases}$，且 $f(x+2T)=f(x)$拉普拉斯轉換(Laplace transform)。(15 分)

【解題關鍵】
1.《考題難易》：★★ 簡單
2.《解題關鍵》：拉卜拉斯轉換，小心計算應可拿分

【擬答】

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1-e^{-2TS}}\int_0^T f(x)\ e^{-sx}\,dx$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2TS}}\int_0^T \cos\left(\frac{\pi x}{T}\right)\ e^{-sx}\,dx$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2TS}}\left[\frac{T^2S^2}{T^2S^2+\pi^2}\left(\frac{\pi}{TS^2}\sin\frac{\pi}{T}x - \frac{1}{S}\cos\frac{\pi}{T}x\right)e^{-Sx}\right]\Big|_0^T$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2TS}} \times \frac{T^2S}{T^2S^2+\pi^2}e^{-ST}(1-\cos\pi)$$

三、若 $\cos(3+i2)=a+ib$，求 a 及 b。(5分)

【解題關鍵】
1.《考題難易》：★ 非常簡單
2.《解題關鍵》：複變函數基本題，應可拿分

【擬答】

$$\cos(3+2i)=\frac{e^{i(3+2i)}+e^{-i(3+2i)}}{2}$$

$$=\frac{e^{3i-2}+e^{-3i+2}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[e^{-2}(\cos3+i\sin3)+e^{2}(\cos3-i\sin3)]$$

$$=\frac{1}{2}[e^{-2}\cos3+ie^{-2}\sin3+e^{2}\cos3-ie^{2}\sin3)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos3(e^{-2}+e^{2})+i\sin3(e^{-2}-e^{2})]$$

$a=\frac{1}{2}\cos3(e^{-2}+e^{2})$, $b=\frac{1}{2}\sin3(e^{-2}-e^{2})]$

四、求 $\oint_{\gamma}\frac{z}{(z+2)(z-4i)}dz$，其中 r 為 $|z|=5$ 的圓。(10分)

【解題關鍵】
1.《考題難易》：★ 非常簡單
2.《解題關鍵》：留數定理基本題，應可拿分

【擬答】

Z=-2，$4i$ 為單極點

(1) $\underset{Z=-2}{\mathrm{Res}}\{f(z)\}=\lim_{z\to-2}(z+2)\frac{z}{(z+2)(z-4i)}=\frac{1}{5}(1-2i)$

(2) $\underset{Z=4i}{\mathrm{Res}}\{f(z)\}=\lim_{z\to4i}(z-4i)\frac{z}{(z+2)(z-4i)}=\frac{1}{5}(4+2i)$

$$\to\oint_{\gamma}\frac{z}{(z+2)(z-4i)}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\underset{Z=Zi}{\mathrm{Res}}\{f(z)\}$$

$$=2\pi i[\frac{1}{5}(1-2i)+\frac{1}{5}(4+2i)]=2\pi i$$

五、$A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ 及 $B=\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 7\end{bmatrix}$，求 x，使得||A$x$－B||最小(least square soluion)。(10 分)

【解題關鍵】
1.《考題難易》：★ 非常簡單
2.《解題關鍵》：矩陣最小平方法求解，基本題應可拿分

【擬答】

$A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix} \rightarrow A^T=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 4 & 2\end{bmatrix}$

$\rightarrow A^TA=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}6 & 10\\ 10 & 24\end{bmatrix}$

$A^TB=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 0\end{bmatrix}$

||Ax－B|| 最小→AX=B

$\rightarrow A^TAX=A^TB$

$\rightarrow \begin{bmatrix}6 & 10\\ 10 & 24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 0\end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{54}{11}\\ -\frac{45}{22}\end{bmatrix}$

乙、測驗題部分：（50 分）

(C) 1. 令 u=i-j-k；v= -3i+4j+6k；w=-2i-4j+2k，則由 u，v 及 w 所形成的平行立方體(parallelepiped)體積為何？
(A) 9　(B) $9\sqrt{2}$　(C) 18　(D) $18\sqrt{2}$

(C) 2. $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 3\end{bmatrix}$，試問 $\forall x\in R^3$，$\frac{x^TAx}{x^Tx}$之最大值為何？
(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

(C) 3. 令矩陣 $A=\begin{bmatrix}5 & 10 & -10\\ 10 & 5 & -20\\ 5 & -5 & -10\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}a & b & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & c\end{bmatrix}$，且 $P^{-1}AP=D$，其中 D 為一 3×3 對角矩陣(diagonal matrix)，下列敘述何者正確？
(A) $a+b+c=5$　(B) $a\times b\times c=4$　(C) $a-b-c=0$　(D) $\frac{a\times b}{c}=1$

(B) 4. 已知 A 為 $m\times n$ 矩陣且 rank(A)=r，下列敘述何者正確？
(A) $A_X=0$ 的解空間(solution space)維度(dimension)為 $m-r$
(B)若 $m=n=r$ 且 x 為 $n\times1$ 未知矩陣，則 $A_X=0$ 存在唯一解
(C)若 $m=n=r$，則 A 的列向量(row vector)彼此間都是線性相依(linear independent)
(D)若 $m>n>r$，則 A 的列向量(row vector)彼此間都是線性獨立(linear dependent)

(C) 5. 求矩陣$A=\begin{bmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$有幾個線性獨立之特徵向量？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

(B) 6. $A=\begin{bmatrix}0&-2\\1&3\end{bmatrix}$，令$e^{A}=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}$，則 $a_{11}+a_{22}=$？

(A) $e-e^2$　(B) $e+e^2$　(C) $-e+e^2$　(D) $2e-e^2$

(D) 7. 下列何者為$(-64)^{\frac{1}{4}}$的複數根？

(A) $-1-i$　(B) $-2-i$　(C) $-1-2i$　(D) $-2-2i$

(A) 8. $\ln\left(1-i\sqrt{3}\right)=$？

(A) $2+i\left(-\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)$，其中 n 為任意整數

(B) $2+i\left(-\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)$，其中 n 為任意整數

(C) $2+i\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right)$，其中 n 為任意整數

(D) $2+i\left(\frac{5\pi}{6}+2n\pi\right)$，其中 n 為任意整數

(B) 9. $\int_{\varphi} z^2 dz$，沿著路徑 $\phi=t+it$，$0\le t\le 2$積分之值：

(A) $\frac{32}{3}(i-1)$　(B) $\frac{16}{3}(i-1)$　(C) $\frac{8}{3}(i-1)$　(D) $\frac{4}{3}(i-1)$

(A) 10. 假設 $f(z)=\dfrac{1}{z}$，求$\oint_C f(z)dz$之值，C 為$|z-2|=1$之逆時針之圓周。

(A) 0　(B) $2\pi i$　(C) $-2\pi i$　(D) $4\pi i$

(C) 11. 假設 $k_1e^{ax}+k_2e^{bx}+e^{cx}$ 為微分方程式 $y''-6y'+8y=3e^{x}$ 的解，則 a+b+c 為何？

(A) -6　(B) -4　(C) 7　(D) 9

(A) 12. 假設路徑 C 是一逆時針的正方形，其各邊位於直線 $x=\pm 2$ 和 $y=\pm 2$ 之上。試求出$\int_C \dfrac{e^{-z}}{z-\left(\pi i/2\right)}dz$值為何？

(A) 2π　(B) π　(C) $-\pi i$　(D) 1

(B) 13. 給定一組微分方程式 $x_1'=-x_2$, $x_2'=1.01x_1-0.2x_2$，起始值為 $x_1(0)=0$，$x_2(0)=-1$，則$\lim\limits_{t\to+\infty} x_2(t)=$？

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 無窮大

(C) 14. 令$F(s)=\dfrac{s+1}{s^2\left(s^2+1\right)}$，試求 F(s)之反拉普拉斯轉換(inverse Laplace transform)$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$？

(A) $1-\sin(t)+\cos(t)$, $t>0$　(B) $t+\sin(t)-\cos(t)$, $t>0$

(C) $1+t-\sin(t)-\cos(t)$, $t>0$　(D) $1+t+\sin(t)+\cos(t)$, $t>0$

(B) 15. 下列何者為偏微分方程式$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\dfrac{\partial u}{\partial y}$的解？以下 c_1, c_2, α 為常數。

(A) $u(x,y)=c_1e^{K}\cos 2\alpha x+c_2e^{K}\sin 2\alpha x$，其中 $K=a^2y$

(B) $u(x,y)=c_1e^{K}\cosh 2\alpha x+c_2e^{K}\sinh 2\alpha x$，其中 $K=a^2y$

(C) $u(x,y)=c_1e^{T}\cos 2\alpha y+c_2e^{T}\sin 2\alpha y$，其中 $T=a^2x$

(D) $u(x,y)=c_1e^{T}\cosh 2\alpha y+c_2e^{T}\sinh 2\alpha y$，其中 $T=a^2x$

(B) 16. 求$\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{s-1}{s+1}\right)$之反拉普拉斯轉換為下列何者？

(A) $-2e^{-t}+t+2$　(B) $-2e^{-t}+t+2$　(C) $-2e^{-t}+t-2$　(D) $-2e^{-t}-t-2$

(C) 17. 已知函數 $x(t)$ 其傅立葉轉換為 $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ 且 $|X(j\omega)|=2(u(\omega+3)-(\omega-3))$，$\sphericalangle X(j\omega)=-\frac{3}{2}\omega+\pi$，其中方程式 $\begin{cases} u(\omega)=1, \omega\geq 0 \\ u(\omega)=0, \omega<0 \end{cases}$，請問 t 為下列何者時，$x(t)=0$？

(A) $\frac{1}{2}+\pi$　(B) $1+\frac{\pi}{2}$　(C) $\frac{3}{2}+\frac{\pi}{3}$　(D) $2+\frac{\pi}{4}$

(B) 18. 一個盒子中有 30 顆 IC，劣品比率為 1/6，在某次實驗中取了 10 顆 IC，試問此次實驗所用的 IC 都是良品的機率為何？

(A) $\frac{C_0^2 C_{10}^{28}}{C_{10}^{30}}$　(B) $\frac{C_0^5 C_{10}^{25}}{C_{10}^{30}}$　(C) $\frac{C_0^6 C_{10}^{24}}{C_{10}^{30}}$　(D) $\frac{C_0^{10} C_{10}^{20}}{C_{10}^{30}}$

(D) 19. 給定一個連續隨機變數 X，其機率密度函數為 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/4}, & x>0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$，試問一個隨機變數 $Y=3X-2$，則此隨機變數 Y 的變異數(variance)σ_Y^2 為何？

(A) 18　(B) 36　(C) 64　(D) 144

(B) 20. 設有一連續隨機變數 X 具有機率密度函數 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\leq x\leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，求其期望值。

(A) 1　(B) 2/3　(C) 3/4　(D) 4/5