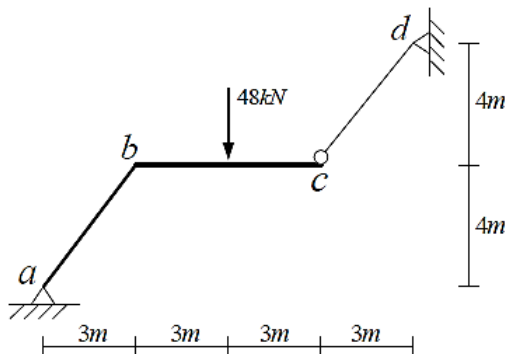


## 109 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：土木工程

科 目：結構學

一、如圖一所示結構，承受垂直集中載重  $48kN$ ， $a$  點及  $d$  點為鉸支承，點  $c$  連接一軸力 桿件  $cd$ ，桿件  $cd$  彈性模數  $E$  與斷面積  $A$  之乘積為  $EA=62500kN$ ，而桿件  $ab$  及  $bc$  有 相同之彈性模數  $E$  與慣性矩  $I$ ，且  $EI=318000kN-m^2$ 。若不考慮桿件  $ab$  及  $bc$  的軸向變形，求支承  $a$  點反力、 $cd$  桿件軸力及  $b$  點水平位移。(25 分)



圖一

【分析】本題 C 點應為鉸接續，若為滾接續則不穩定  
 $(R = NE - 3n = 2 + 2 + 1 - 3 \times 2 = -1 < 0)$ ，以下以單位力法計算。

【擬答】：

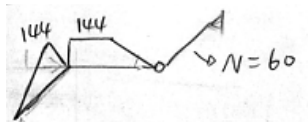
(一) Real load :

$$\boxed{abc} \quad \sum M_a = 0 \Rightarrow 48 \times 6 + \frac{3}{5} R_c \times 4 - \frac{4}{5} R_c \times 9 = 0 \Rightarrow R_c = 60(kN)$$

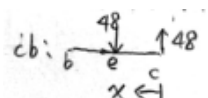
cd 軸拉力

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + \frac{3}{5} R_c = 0 \Rightarrow A_x = -36 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 48 + \frac{4}{5} R_c = 0 \Rightarrow A_y = 0 \end{cases} \Rightarrow R_a = 36(kN)$$

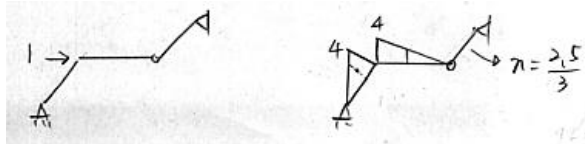
(二) M&N



Note  $ab : V_a = 36 \times \frac{4}{5} = 28.8 \Rightarrow M = 28.8x \Rightarrow M_b = 28.8 \times 5 = 144$

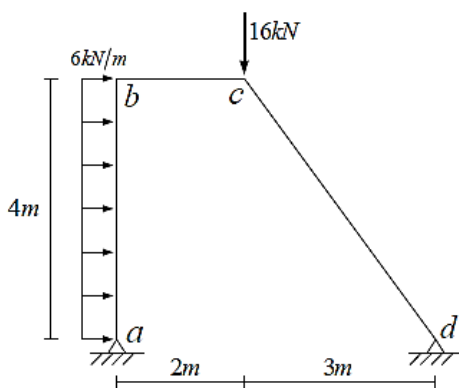
$cb :$    $M = 48x$  or  $ce \Rightarrow M_e = 48 \times 3 = 144$

(三) Virtual load  $m \& n$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta_b &= \int_{ab} \frac{mM}{EI} dx + \int_{bc} \frac{mM}{EI} dx + \frac{nN}{EA} L \\ &= \frac{1}{EI} \left( \frac{144 \times 5}{2} \times 4 \times \frac{2}{3} + 144 \times 3 \times 4 \times \frac{4.5}{6} + \frac{144 \times 3}{2} \times \frac{4}{3} \right) + \frac{1}{EA} \left( 60 \times \frac{2.5}{3} \right) \times 5 \\ &= 0.012(m) (\rightarrow) \end{aligned}$$

二、如圖二所示剛架， $a$  點及  $d$  點為鉸支承，各桿件有相同之彈性模數  $E$  值與慣性矩  $I$  值， $ab$  桿件承受水平均布載重  $6kN/m$ ， $c$  點承受垂直集中載重  $16kN$ 。不考慮各桿件的軸向變形，求各支承反力及  $bc$  桿件的端點彎矩。(25 分)



圖二

【分析】

本題若採用傾角變位法， $ad$  鉸修正後剩  $\theta_b$ 、 $\theta_c$ 、 $R_{CD}$ 。 難度：4

【擬答】：

(一) 變位諧合：

$$\sum \Delta_x = 0 \Rightarrow 4R_{AB} - 4R_{CD} = 0$$

$$\sum \Delta_y = 0 \Rightarrow 2R_{BC} + 3R_{CD} = 0$$

(二)  $M^F / M^H$ ：

$$M_{BA}^H = \frac{wL^2}{8} = 12$$

(三)  $M_{ij}$ ：

$$M_{BA} = \frac{3EI}{4} (\theta_B - R_{AB}) + 12$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{2} (2\theta_B + \theta_C - 3R_{BC})$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{2} (2\theta_C + \theta_B - 3R_{BC})$$

$$M_{CD} = \frac{3EI}{5} (\theta_C - R_{CD})$$

公職王歷屆試題 (109 高考三等考試)

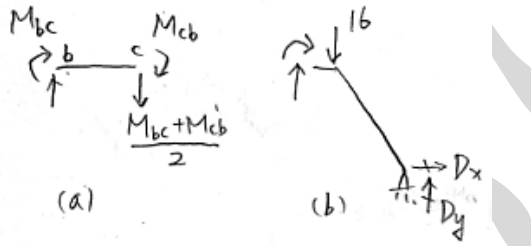
(四)平衡：

$$\boxed{B} \quad \sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad \text{----(1)}$$

$$\boxed{C} \quad \sum M_C = 0 \Rightarrow M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad \text{----(2)}$$

$$\boxed{全} \quad \sum M_d = 0 \Rightarrow 16 \times 3 - 24 \times 2 - 5A_g = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 0 \quad \Rightarrow D_y = 16$$



$$(b) \sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{M_{bc} + M_{cb}}{2} + 16 = 16 \Rightarrow M_{bc} + M_{cb} = 0 \quad \text{----(3)}$$

由(1)(2)(3)可得

$$M_{ba} = -14.633 \quad M_{cb} = -14.633 \quad M_{bc} = 14.633 \quad M_{cb} = 14.633$$

(kN-m) ↺

(五)求反力：

$$\boxed{ab} \quad \sum b = 0$$

$$\Rightarrow M_{ba} - 48 - 4A_x = 0$$

$$\Rightarrow A_x = -15.658(kN)$$

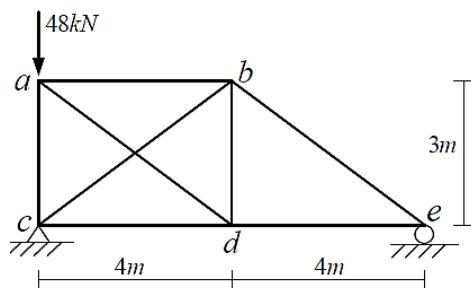
$$\boxed{全} \quad \sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow 24 + A_x + D_x = 0$$

$$\Rightarrow D_x = -8.34(kN)$$



三、如圖三所示之平面桁架結構，c 點為鉸支承，e 點為滾支承，各桿件都有相同之彈性模數  $E$  值與斷面積  $A$  值，且  $EA = 5250kN$ ， $a$  點承受垂直集中載重  $48kN$ 。已知  $bd$  桿件為  $3kN$  軸拉力、 $be$  桿件及  $de$  桿件軸力為零，求桁架其他桿件的軸力及  $b$  點的垂直位移。(25 分)



圖三

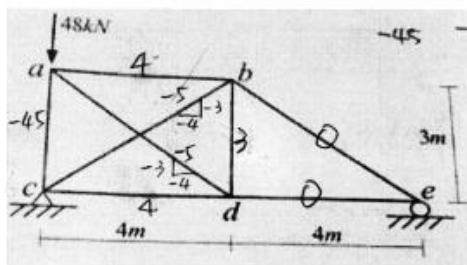
**【分析】**

本題可先求得內力，再由單位力法求 b 點向下位移  $\Delta_b$  (Note：本題為 1 次超靜定。

**【擬答】：**

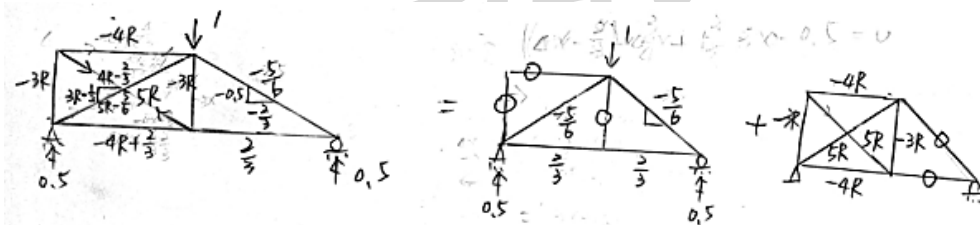
(一) Real load :

內力解如上圖上所標示



(二) Virtual load :

於 b 施一向下一單位力，取 ad 內力為贅力 5R

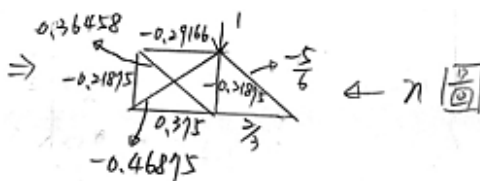


(2)(令  $R = \frac{1}{5}$ , 即為  $n'$  圓)

$$\Delta_{(1)} = \sum \frac{n'N}{EA} L = \frac{1}{EA} \left( \frac{-5}{6} \times 1 \times 5 + \frac{2}{3} \times \frac{-4}{5} \times 4 \right) = \frac{-6.3}{EA}$$

$$\Delta_{(2)} = \sum \frac{n'(5n'R)}{EA} L = \frac{R}{5EA} \left( (-3)^2 \times 3 \times 2 + (-4)^2 \times 4 \times 2 + 5^2 \times 5 + 5^2 \times 5 \right) = \frac{432R}{5EA}$$

$$\Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} = 0 \Rightarrow R = 0.07291$$

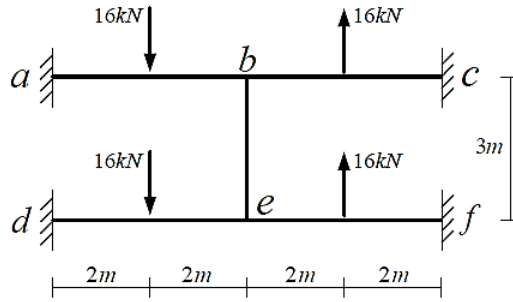


$$\Delta_b = \sum \frac{nN}{EA} L = \frac{1}{EA} (31.5) = 6 \times 10^{-3} (m) (\downarrow)$$

四、如圖四所示之平面剛架結構，a、c、d、f 點為固定端，b 點及 e 點為剛性接頭，各桿件有相

公職王歷屆試題 (109 高考三等考試)

同之彈性模數  $E$  與慣性矩  $I$ ，且  $EI = 4000 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ 。不考慮各桿件的軸向變形，求  $b$  點轉角、 $ab$  桿件的端點彎矩及  $a$  點反力。(25 分)



圖四

【分析】

本題反對稱，建議可先利用反對稱性質簡化題目(本題上下與左右皆反對稱)

【擬答】：

(一)反對稱性質：

$$f(-x) = -f(x)$$

$x$	$f(-x)$	$-f(x)$
$y$	+	-
$\theta$	-	-

(二)諧合：

$$R_{ab} = 0, R_{bc} = 0$$

(三)  $M^F$ ：

$$-M_{ab}^F = M_{ba}^F = \frac{16 \times 4}{8} = 8$$

(四)  $M_{ij}$ ：

$$M_{ab} = \frac{2EI}{4}(\theta_b) - 8 \quad M_{ba} = \frac{2EI}{4}(2\theta_b) + 8 \quad M_{bg} = \frac{3EI}{1.5}(\theta_b)$$

(五)平衡：

$$\boxed{b} \quad \sum M_b = 0 \Rightarrow M_{ba} + M_{bc} + M_{bg} = 0 \quad M_{ba} = M_{bc} \text{ (反對稱)}$$

$$\Rightarrow 4EI\theta_b + 16 = 0 \Rightarrow \theta_b = \frac{-4}{EI} = 10^{-3}$$

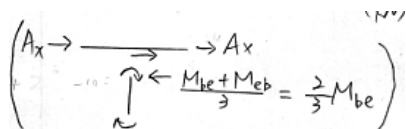
(六)  $M$  與反力：

$$M_{ab} = -10 \quad (\text{A 點彎矩反力})$$

$$M_{ba} = 4$$

$$M_{bg} = -8$$

$$A_y = \frac{-(M_{ab} + M_{ba}) + 16 \times 2}{4} = 9.5 \text{ kN} (\rightarrow)$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}M_{be} + 2A_x = 0$$

$$\Rightarrow A_x = \frac{-1}{3}M_{be} = \frac{-1}{3}M_{bg} = \frac{8}{3} \text{ (kN)} (\uparrow)$$

(kN·m)  
順時針為正