

109 年公務人員高等考試三級考試試題

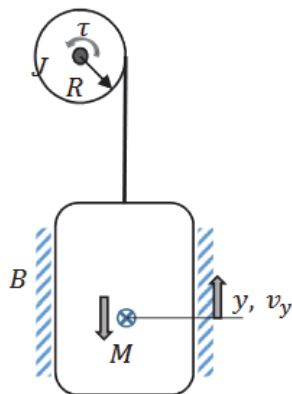
類 科：機械工程

科 目：自動控制

一、以馬達驅動一個半徑為 R 的滑輪，馬達轉子與滑輪的合併慣量為 J ，電梯軸承的線性阻尼係數為 B ，電梯此時的質量為 M 。

(一)請推導電梯從馬達出力 τ 到電梯位置 y 之間的動態方程式。(10 分)

(二)請推導電梯從馬達扭力 $T(s)$ 到電梯位置 $Y(s)$ 之間的轉移函數 (transfer function)。(10 分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》：★★ 簡單
2. 《解題關鍵》：瞭解旋轉運動即可寫出

【擬答】

$$(一) \tau - B\dot{y} = M\ddot{y} \Rightarrow$$

使用拉氏轉換可得

$$Ms^2Y(s) + BsY(s) = \tau(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs}$$

令 $x_1 = x; x_2 = \dot{x}$

則其動態方程式為

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 + \frac{1}{M}\tau$$

$$y = x_1$$

$$(二) \tau - B\dot{y} = M\ddot{y} \Rightarrow (Ms^2 + Bs)Y(s) = \tau \text{ -----(1)}$$

$$T - J\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\tau \Rightarrow T(s) = Js^2\theta(s) + R\tau(s) \Rightarrow \tau(s) = \frac{1}{R}[T(s) - Js^2\theta(s)] \text{ -----(2)}$$

$$\theta(s) = \frac{1}{R}Y(s) \text{ -----(3)}$$

(2)-(3)式代入(1)式

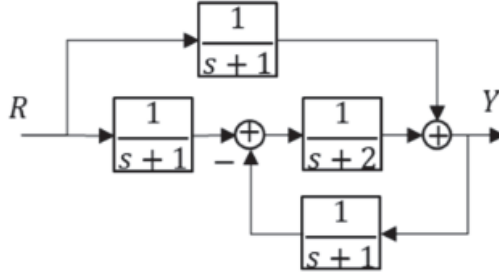
則

公職王歷屆試題 (109 高考)

$$(Ms^2 + Bs)Y(s) = \frac{1}{R} [T(s) - Js^2\theta(s)] \Rightarrow R(Ms^2 + Bs)Y(s) = T(s) - Js^2 \frac{1}{R} Y(s)$$

$$\therefore \frac{Y(s)}{T(s)} = \frac{1}{R(Ms^2 + Bs) + Js^2 \frac{1}{R}} = \frac{R}{(J + R^2M)s^2 + R^2Bs}$$

二、請推導下面方塊圖從 $R(s)$ 到 $Y(s)$ 的轉移函數。(20 分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》：★★★★ 普通
2. 《解題關鍵》：負回授部分先求響應後再求整體轉移函數

【擬答】

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1} \times \frac{\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{s+2}} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1} \times \frac{s+1}{s^2+3s+3} \\ &= \frac{s^2+3s+3+s+1}{(s+1)(s^2+3s+3)} = \frac{s^2+4s+4}{(s+1)(s^2+3s+3)} \end{aligned}$$

三、一系統的轉移函數為 $G(s) = \frac{1}{s(0.5s+1)}$ ，請設計一個比例控制器 $G_c(s) = K_p$ 來調整系統的閉迴路響應，使得閉迴路系統的阻尼函數為 0.5。(20 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》：★★ 簡單
2. 《解題關鍵》：比較係數 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ 即可求出

【擬答】

當 $G_c = K_p$ 時，特性方程式為 $(s) = 0.5s^2 + s + K_p = 0 \Rightarrow s^2 + 2s + 2K_p = 0$

比較係數

$$s^2 + 2s + 2K_p = s^2 + 2 \times 0.5 \times \omega_n + \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n = 2 \Rightarrow K_p = 2$$

四、不穩定系統的轉移函數為 $G(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$ ，若吾人以一個 PD 控制器 $G_c(s) = K_p(s+1)$ 來控制此系統。

(一)請計算本系統穩定之 K_p 範圍。(10 分)

(二)當系統在穩定邊界狀態時，系統的振動頻率為何？(10 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》：★★★★ 普通
2. 《解題關鍵》：使用 R-H 法則即可求出

【擬答】

所得特性方程式為

$$\Delta(s) = s^2 + (K_p - 3)s + (K_p + 2) = 0$$

s^2	1	$K_p + 2$	
s^1	$K_p - 3$	0	
s^0	$K_p + 2$		

$$(-) K_p - 3 > 0 \Rightarrow K_p > 3 ; K_p + 2 < 0 \Rightarrow K_p < -2 ; K_p > 0$$

所以 $K_p > 3$

$$(二) K_p = 3 \Rightarrow s^2 + 5 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{5} \Rightarrow \omega = \sqrt{5}$$

五、考慮系統特徵方程式為 $1 + K \frac{16s + 1}{s^4 + 4s^3 + 4s^2} = 0$ ，請以羅氏分析決定可使系統穩定的 K 值範圍。

(20 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》：★★★★ 普通
2. 《解題關鍵》：瞭解羅氏分析判斷穩定的準則即可寫出

【擬答】

閉迴路方程式為

$$\Delta(s) = s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 16Ks + K = 0$$

Routh-Hurwit 表如下

s^4	1	4	K
s^3	4	16K	0
s^2	$\frac{16 - 16K}{4}$	K	
s^1	$\frac{16K^2 - 15K}{K - 1}$	0	
s^0	K		

若需閉迴路穩定，則

$$16 - 16K > 0 \Rightarrow K < 1$$

$$K(16K - 15)(K - 1) > 0 \Rightarrow 16K - 15 < 0 \Rightarrow K < \frac{15}{16}$$

$$K > 0$$

$$\text{所以 } 0 < K < \frac{15}{16}$$