109 年公務人員高等考試三級考試試題

類　　科：水利工程、環境工程、機械工程

科　　目：流體力學

一、一光滑表面的球體在靜止的水中釋放沉降，該球體比重為 1.02，直徑為 30 公分，若阻力係數（drag coefficient）為 0.5。

㈠試計算球體的終端速度。（20 分）

㈡若球體表面是粗糙的，其終端速度會較光滑球面者大或小？為什麼？（5 分）

【解題關鍵】

《考題難易》：★★。

《破題關鍵》：潛變流之應用。

【擬答】

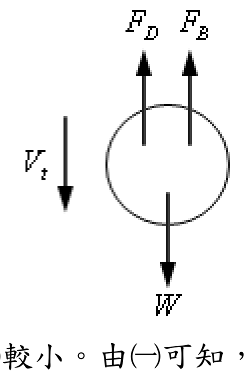
㈠取球體之自由體圖，由垂直方向之力平衡方程式可得 $F_D + F_B = W$

其中⑴阻力 $F_D = C_D \dfrac{1}{2}\rho_w A V_t^2 = \dfrac{C_D \rho_w \pi D^2 V_t^2}{8}$，$V_t$ 為終端速度

⑵浮力 $F_B = \gamma_w \forall = \rho_w g \dfrac{\pi D^3}{6}$

⑶球體重 $W = \gamma_s \forall = s\rho_w g \dfrac{\pi D^3}{6}$

$$\therefore\ V_t = \sqrt{\frac{4gD(s-1)}{3C_D}} = 0.396(m/s)$$



㈡較小。由㈠可知，終端速度與阻力係數成反比。

二、某一大型風渦輪機擬在大型風洞中進行模型實驗，設現場風速為 50 km/h，模型的幾何比例尺為 1：15，因風洞尺度夠大，且為降低空氣的壓縮性效 應，故用相同的原型風速來進行模型試驗。

㈠若原型風機的轉速為 5 rpm，試決定試驗模型的風機轉速？（10 分）

㈡若測量出模型的風機輸出功率為 2.22 kW，試計算原型的風機輸出功 率？（15 分）

【解題關鍵】
《考題難易》：★★。
《破題關鍵》：模型模擬之應用。

【擬答】

㈠ $\frac{l_m}{l_p}=\frac{1}{15}$，$\frac{V_m}{V_p}=1$

$$\therefore \frac{V_m}{V_p}=\frac{\pi D_m N_m}{\pi D_p N_p}=\left(\frac{l_m}{l_p}\right)\times\left(\frac{N_m}{N_p}\right)\Rightarrow 1=\left(\frac{1}{15}\right)\times\left(\frac{N_m}{5}\right)\Rightarrow N_m=75(rpm)$$

㈡

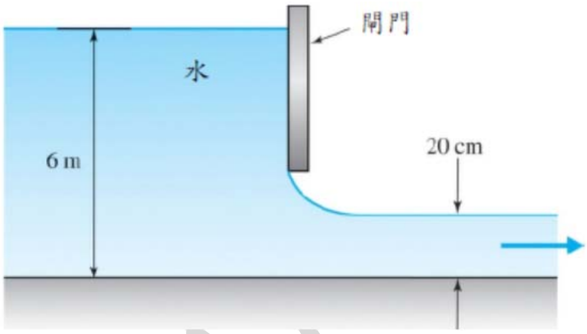
$$C_{D,m}=C_{D,p}\Rightarrow\left(\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho l^2V^2}\right)_m=\left(\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho l^2V^2}\right)_p$$

其中⑴假設 $\rho_m=\rho_p$，且由題意可知 $V_m=V_p$

⑵ $P_m(kw)=\frac{F_{D,m}\times V_m}{1000}\Rightarrow F_{D,m}=159.7(N)$

$\therefore\ F_{D,p}=F_{D,m}\left(\frac{l_p}{l_m}\right)^2=35932.5(N)$，故 $P_p(kw)=\frac{F_{D,p}\times V_p}{1000}=499.06(kw)$

三、如下圖所示，渠道中設置一閘門，渠道寬度為 4 m，上游水深維持在 6 m，下游水深維持在 20 cm，假設不計摩擦及能量損失，試求水流作用於該閘 門的力量。(25 分）



【解題關鍵】
《考題難易》：★★。
《破題關鍵》：線性動量方程式之應用。

【擬答】

如圖所示，由上游斷面處①及下游斷面處②間之柏努利方程式可得

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

其中⑴ $P_1=P_2=P_{atm}$

⑵ $Q=A_1V_1=A_2V_2 \Rightarrow V_2=\frac{A_1}{A_2}V_1=30V_1\left(m/s\right)$

⑶ $z_1=6\left(m\right)$，$z_2=0.2\left(m\right)$

$\therefore$ $V_1=0.36\left(m/s\right)$，$V_2=30V_1=10.8\left(m/s\right)$

如圖所示，取虛線內為控制體積$\left(C.V.\right)$，由水平$\left(x\right)$方向之動量方程式可得

$$\sum F_x=\dot{m}\left(V_{out}-V_{in}\right)\Rightarrow P_1A_1-P_2A_2-F=\dot{m}\left(V_2-V_1\right)$$

其中(1) $P_1A_1=\frac{\gamma h_1}{2}\times bh_1=706.32\left(kN\right)$，$P_2A_2=\frac{\gamma h_2}{2}\times bh_2=0.785\left(kN\right)$

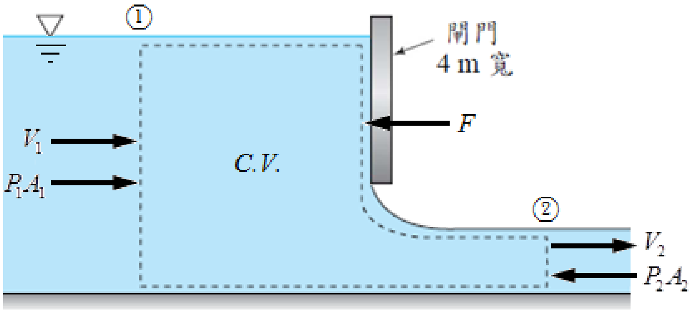
(2) $V_1=0.36\left(m/s\right)$，$V_2=10.8\left(m/s\right)$

(3) $\dot{m}=\rho A_1V_1=8640\left(kg/s\right)$

(4) F 為閘門作用於水上之水平力

$\therefore$ $F=615333\left(N\right)\left(\leftarrow\right)$

故 水流作用於閘門上之水平力為 $F'=-F=615333\left(N\right)\left(\rightarrow\right)$


①
閘門
4 m 寬
F
V_1
P_1A_1
C.V.
②
V_2
P_2A_2

四、二維尤拉方程式（Euler equation）表示如下：

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z})$$

$$-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z})$$

其中 u 與 w 分別表示在 x 與 z 二個方向的速度分量，g 為重力加速度，p 為壓 力，為流體密度，t 為時間。若考慮流場為穩定流（steady）、非旋性 （irrotational）且流體具不可壓縮性，

試推導出柏努利方程式（Bernoulli equation）為：$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}(u^2+w^2)+gz$=常數。(25 分)

【解題關鍵】
《考題難易》：★★★★★。
《破題關鍵》：尤拉方程式之應用。

【擬答】

若考慮流場為穩流、無黏性、非旋性且流體具不可壓縮性，則尤拉方程式以向量形式可以表示為

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\nabla P+\rho\vec{g}\Rightarrow\rho\left[\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}\right]=-\nabla P+\rho\vec{g}$$

其中(1)設 z 軸向上為正，故 $\vec{g}=-g\nabla z$

(2)由向量恆等式可得 $\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}=\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\vec{V}\times\left(\nabla\times\vec{V}\right)=\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)$

$$\therefore\ \rho\left[\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)\right]=-\nabla P-\rho g\nabla z\Rightarrow\nabla\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz\right)=0$$

沿一條流線取一微小長度 $d\vec{s}$，並令上式與 $d\vec{s}$ 作點積，則可得

$\nabla\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz\right)\cdot d\vec{s}=0$，其中 $d\vec{s}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\Rightarrow\nabla P\cdot d\vec{s}=dP$

$\therefore\ \nabla\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz\right)\cdot d\vec{s}=0\Rightarrow d\left(\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz\right)=0$，積分此式可得

$\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=$ 常數，其中二維流場之 $V^2=u^2+w^2$

故 $\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}\left(u^2+w^2\right)+gz=$ 常數