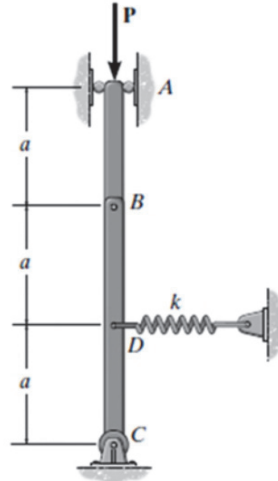


109 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：機械工程

科 目：工程力學（包括靜力學、動力學與材料力學）

一、如圖所示，已知剛性桿 AB 和 BC 在 B 處銷釘連接 (pin connected)。假設 D 處之彈簧的剛度 (stiffness) 為 k ，試決定系統的臨界載荷 P_{cr} 。(20 分)



【解題關鍵】

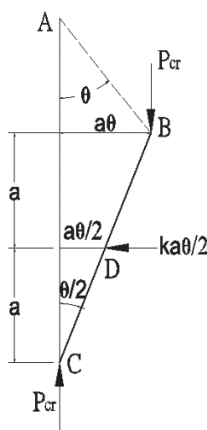
1. 《考題難易》：★★★ 普通

2. 《解題關鍵》：

- (1) 剛性桿 AB 和 BC 不變形，以剛性柱分析。
- (2) 臨界狀態為系統之傾倒力矩恰等於恢復力矩時的狀態。
- (3) B 點為銷釘可自由轉動，因此令 B 點側移使 AB 桿轉一角度，模擬系統變形情況。

【擬答】

令 AB 桿逆時旋轉 θ ， BC 桿在側位移後的自由體如圖所示。



D 處彈簧壓縮量為 $a\theta/2$ ，彈簧恢復力為 $ka\theta/2$

依自由體的 B 點合力矩平衡列出式如下

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow P_{cr} \times a\theta = \frac{ka\theta}{2} \times a$$

$$\therefore P_{cr} = \frac{ka}{2}$$

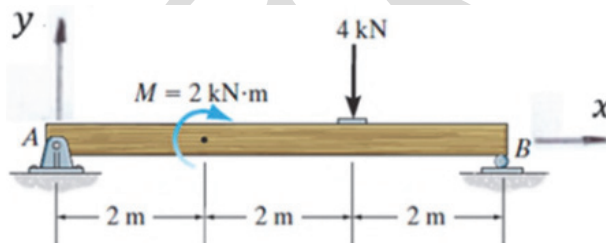
公職王歷屆試題 (109 高考)

答：系統的臨界載荷 P_{cr} 為 $ka/2$ 。

二、如圖所示，其中點 A 為原點。已知簡支樑之截面為 $b \times h$ 之矩形，其中 b 為樑之寬度、 h 為樑之高度，請回答下列問題：（每小題 5 分，共 30 分）

- (一) 試繪製簡支樑 (simply supported beam) 的自由體圖，並求點 A 和 B 處的反力。
- (二) 試繪製簡支樑的剪力圖，並且求外力作用處的剪力。
- (三) 試繪製簡支樑的彎矩圖，並且求外力作用處的彎矩。
- (四) 試求沿簡支樑中立軸 (neutral axis) 的最大剪應力 τ_{max} (maximum shear stress) 及其位置。
- (五) 試求沿簡支樑上表面 ($y=0.5h$) 的最大剪應力及其位置。
- (六) 試求簡支樑之最大剪應力及其位置。

(提示參考公式： $\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ ， $\sigma = \frac{-My}{I}$ ， $\tau = \frac{QV}{Ib}$ 。)



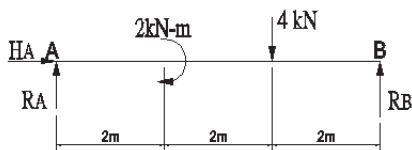
【解題關鍵】

- 1. 《考題難易》：★★ 簡單
- 2. 《解題關鍵》：

- (1) 中立軸 (neutral axis) 的最大剪應力可以使用剪力係數 a_s 計算。
- (2) 表面 ($y=0.5h$) 的 τ_{xy} 剪應力為零，但其 τ_{max} 為以 σ_x 及 σ_y 經 $\tau_{1,2}$ 公式計算而得。
- (3) 最大剪應力及其位置依題意為剖面最大剪力發生處之剪應力。
- (4) 題意未設定 b, h 之單位，計算時設 b, h 單位為 mm ，才能確立應力的單位。

【擬答】

(一) 簡支樑的自由體圖，點 A 和 B 處的反力。

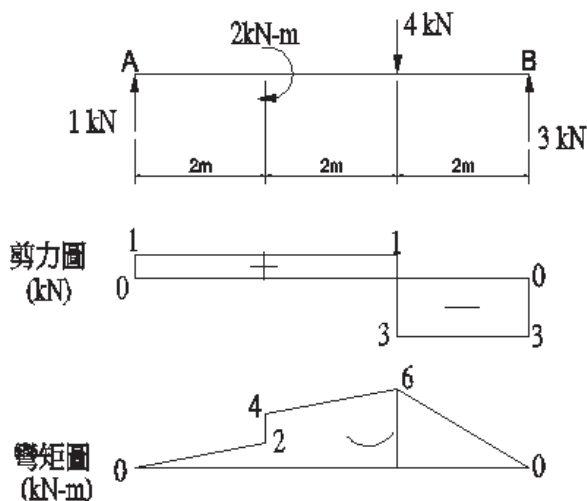


$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A \times 6 + 2 - 4 \times 2 = 0 \Rightarrow R_A = 1kN(\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - 4 = 0 \Rightarrow 1 + R_B - 4 = 0 \Rightarrow R_B = 3kN(\uparrow)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

(二)(三) 簡支樑的剪力圖，外力作用處的剪力及彎矩



外力作用處的剪力及彎矩

1. $2kN \cdot m$ 力偶作用處剪力： $V=1kN$ (順時)
2. $4kN$ 外力作用處的剪力：左側剪力為 $V_L=1kN$ (順時)，右側剪力為 $V_R=3kN$ (逆時)
3. $2kN \cdot m$ 力偶作用處的彎矩：左側彎矩為 $M_L=2kN \cdot m$ (向上凹)，
右側彎矩為 $M_R=4kN \cdot m$ (向上凹)
4. $4kN$ 外力作用處彎矩： $M=6kN \cdot m$ (向上凹)

(四) 樑中立軸的最大剪應力 τ_{max} 及其位置

設 b, h 單位為 mm

中立軸的彎矩應力為零 ($\sigma_x=0$)

樑中最大剪力在 $4kN$ 外力作用處之右側 $V_R=3kN$ (逆時)

$$Q = \frac{1}{2}bh \cdot \frac{1}{4}h = \frac{1}{8}bh^2$$

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{3 \times 10^3 \times \frac{1}{8}bh^2}{\frac{1}{12}bh^3 \times b} = \frac{9 \times 10^3}{2bh} MPa = \frac{9}{2bh} GPa$$

$$\text{或 } \tau_{max} = \alpha_s \frac{V}{A} = \left(\frac{3}{2}\right) \frac{3 \times 10^3}{bh} = \frac{9 \times 10^3}{2bh} MPa = \frac{9}{2bh} GPa$$

(五) 樑上表面 ($y=0.5h$) 的最大剪應力及其位置

設 b, h 單位為 mm

表面 ($y=0.5h$) 的剪應力為零 ($\tau_{xy}=0$)

樑中最大彎矩在 $4kN$ 外力作用處 $M=6kN \cdot m$ (向上凹)

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} = -\frac{6 \times 10^6 \times \frac{1}{2}h}{\frac{1}{12}bh^3} = -\frac{36 \times 10^6}{bh^2} MPa = -\frac{36000}{bh^2} GPa$$

$$\sigma_y = 0 GPa$$

計算最大剪應力為 $\tau_{1,2}$ 如下：

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{36000}{b^2} - 0}{2}\right)^2} + 0 = \pm \frac{18000}{b^2} \text{ GPa}$$

(六)簡支樑之最大剪應力 τ_{max} 及其位置

設 b, h 單位為 mm

中立軸的彎矩應力為零 ($\sigma_x=0$)

樑中最大剪力在 4kN 外力作用處之右側 $V_R=3\text{kN}$ (逆時)

剖面中立軸位置有最大剪應力 τ_{max}

$$\tau_{max} = \alpha_s \frac{V}{A} = \left(\frac{3}{2}\right) \frac{3 \times 10^3}{b^2} = \frac{9 \times 10^3}{2b^2} \text{ MPa} = \frac{9}{2b^2} \text{ GPa}$$

三、如圖所示，一質量 $m=1.8\text{kg}$ 的軸環 A 連接到彈簧上，並且可以在水平桿上滑動而不產生摩擦。已知彈簧常數 $k=1051 \text{ N/m}$ ，且當軸環受到壓縮而在靜止狀態自由釋放時，是以初始速度 $v=1.4 \text{ m/s}$ 向右移動。請回答下列問題：

(一)若以水平向右代表 x -軸，試繪製軸環 A 的自由體圖，並推導其運動方程式。(10 分)

(二)直接利用小題(一)的結果，試表明或驗證軸環 A 的運動方程式可以表為 $x=C\sin\omega t+D\cos\omega t$ ，其中 C 和 D 為常係數， ω 為自然頻率，及 t 為時間。(5 分)

(三)試決定軸環 A 在運動過程中的自然頻率 ω 、振幅和最大加速度各為多少？(10 分)



【解題關鍵】

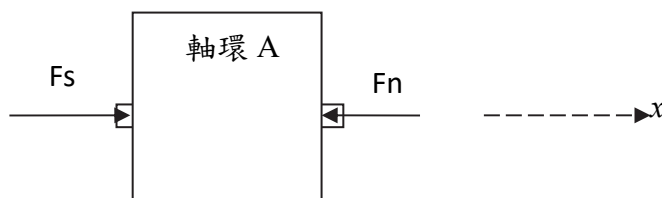
1. 《考題難易》★★★：普通

2. 《解題關鍵》：

動力學-機械震動(簡諧運動)：由牛頓第二運動定律，與力學能守恆及震動學，及假設物體作簡諧運動可求得答案。

【擬答】

(一)軸環 A 的自由體圖



F_s ：彈簧恢復力； F_n ：向心力

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_s - F_n = 0 \Rightarrow k\Delta x - ma_n = 0$$

$$\text{運動方程式} : x = \frac{m}{k} a_n = \frac{m}{k} \ddot{x} \Rightarrow x - \frac{m}{k} \ddot{x} = 0$$

$$\text{又 } a_n = R\omega^2 \text{ 且 } R = \Delta x = x \quad \therefore k\Delta x = kx = mR\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

(二) 假設符合簡諧運動

$$\text{今 } x = C\sin\omega t + D\cos\omega t \quad ; \quad V = \frac{dx}{dt} = C\omega \cos\omega t - D\omega \sin\omega t \quad ;$$

$$a = \frac{dV}{dt} = -C\omega^2 \sin\omega t - D\omega^2 \cos\omega t$$

因為軸環 A 連接到彈簧上，並且可以在水平桿上滑動而不產生摩擦，是以初始速度 $v=1.4$ m/s 向右移動，根據力學能守恆

$$Ue_1 = Ek_2 \Rightarrow \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mV_2^2 \quad \text{已知 } V_2 = 1.4 \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\therefore \Delta x = x = \sqrt{\frac{mV_2^2}{k}} = \sqrt{\frac{1.8 \times 1.4^2}{1051}} = 0.058(m \leftarrow) = -0.058(m)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1051}{1.8}} = 24.16(\text{red/sec})$$

$$\text{當 } x = -0.058(m), t = 0 \text{ 代入 } x = C\sin\omega t + D\cos\omega t$$

$$-0.058 = 0 + D \cos(24.16 \times 0) \quad \therefore D = -0.058$$

$$\text{當 } V = 1.4 \left(\frac{m}{s}\right), t = 0 \text{ 代入 } V = C\omega \cos\omega t - D\omega \sin\omega t$$

$$1.4 = C \times 24.16 \cos(24.16 \times 0) - 0 \quad \therefore C = 0.058$$

$$\therefore x = C\sin\omega t + D\cos\omega t = \mathbf{0.058\sin\omega t - 0.058\cos\omega t}$$

(三) 自然頻率(ω)、振幅(Z)和最大加速度(a)

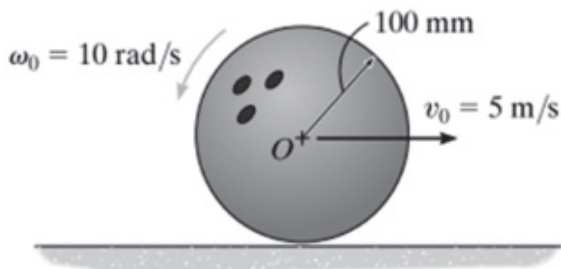
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1051}{1.8}} = 24.16(\text{red/sec})$$

當 $t = 0$ 時，有速度最大、可以得振幅及最大加速度

$$\therefore Z = \frac{V_{max}}{\omega} = \frac{1.4}{24.16} = 0.058(m)$$

$$a_{max} = Z\omega^2 = Z \times \frac{k}{m} = 0.058 \times \frac{1051}{1.8} = 33.87(m/sec^2)$$

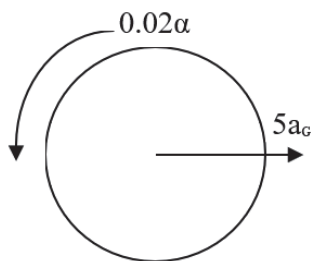
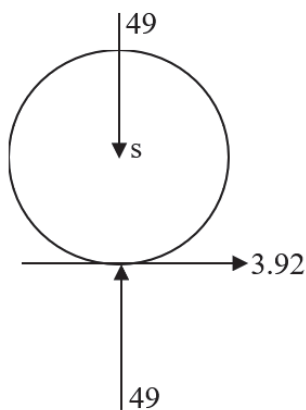
四、將質量 $m=5\text{ kg}$ 的球以 $\omega_0=10\text{ rad/s}$ 的後旋方式放在一巷道上，其質心 O 的速度為 $V_0=5\text{ m/s}$ 。試決定球停止旋轉的時間，以及此時的質心速度。假設球與巷道之間的動摩擦係數為 $\mu_k=0.08$ 。(25 分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》：★★★★ 困難
2. 《解題關鍵》：題目應說明清楚停止旋轉時為「正」旋轉停止或「後」旋轉停止。此題假設為「後」旋轉停止。牛頓第二運動定律。

【擬答】



$$\begin{aligned} \sum M_s &= (\sum M_s)_{eff} \\ 3.92 \times 0.1 &= -0.02 \alpha \\ \alpha &= -19.6 \\ \omega &= 10 - 19.6t \\ t &= 0.51(\text{sec}) \\ V &= 0.51 \times (-0.784) + 5 \\ &= 4.60016(\text{m/s}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ 3.92 &= 5a_c \\ a_c &= 0.784 \end{aligned}$$