

109 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等別：三等考試

類科：電子工程

科目：電磁學

一、已知向量磁位能(magnetic vector potential) $\vec{A}(\vec{r})$ 和電流密度(current density) $\vec{J}(\vec{r})$ 之關係式為 $\vec{A}(\vec{r})$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}', \text{ 其中 } \vec{r} \text{ 為場位置, } \vec{r}' \text{ 為源位置, } \mu_0 \text{ 為導磁係數(permeability), 積分係對應於}$$

所有空間, 且當 $|\vec{r}'| \rightarrow \infty$ 時, $\vec{J}(\vec{r})$ 較 $1/|\vec{r}'|$ 趨近於零, 證明以下三小題。

$$(\neg) \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0. (8 \text{ 分})$$

$$(\neg) \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}'. (6 \text{ 分})$$

$$(\neg) \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}). (6 \text{ 分})$$

【解題關鍵】

1.《考題難易》★★★

2.《解題關鍵》需瞭解向量磁位與磁通密度之關係

【擬答】

$$(\neg) \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{J}(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \nabla \cdot \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = 0$$

$$(\neg) \text{證明 } \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}'$$

$$\begin{aligned} \vec{B} = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) &= \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{J}(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \vec{J}(\vec{r}') \nabla \times \left(\frac{d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \vec{J}(\vec{r}') \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla \times d^3\vec{r}' + \left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times d^3\vec{r}' \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

$$(\neg) \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \text{ 代入 } \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

志光.學儒.保成
專屬工科人的工頂人生
我們都上榜了!

連過三榜 雙料金榜 眾多連續上榜，再創工科巔峰！地方特考、台電職員蓄勢待發

李○庭 109年鐵路員級機械工程【全國探花】 109年普考機械工程 連過三榜	楊○仲 109年鐵路特考電子工程【全國榜眼】 109年普考電子工程	柯○智 109年普考資訊處理 109年普考資訊處理	林○旻 109年普考電力工程 109年鐵路特考電力工程	鄭○威 109年普考機械工程 109年鐵路特考機械工程
陳○壽 109年鐵路特考電子工程【全國榜眼】 109年普考電子工程	蔡○全 109年鐵路特考機械工程【全國第四】 109年普考機械工程	彭○琳 109年普考資訊處理 109年普考資訊處理	黃○穎 109年普考電力工程 109年鐵路特考電力工程	盧○芳 109年普考機械工程 109年鐵路特考機械工程
	張○鈺 109年普考電力工程【全國第五】 109年普考電力工程	李○ 109年普考資訊處理 109年鐵路特考資訊處理	蘇○宏 109年普考電力工程 109年鐵路特考電力工程	曾○倫 109年普考電力工程 109年普考電力工程

109年工科上榜菁英齊聚

高考 資訊處理 許○毅 高考 資訊處理 范○毅 高考 資訊處理 李○邱豪 高考 資訊處理 徐慎遠 高考 資訊處理 張振實 普考 資訊處理 郭○豐 普考 資訊處理 李○修 普考 資訊處理 陳○宇 普考 資訊處理 楊○婷 普考 資訊處理 陳○夫 普考 資訊處理 周○ 普考 資訊處理 黃○慈 普考 資訊處理 劉○如 普考 資訊處理 賴○程 普考 資訊處理 陳○婷 普考 資訊處理 林○靜 普考 資訊處理 趙○宏 高考 電力工程 蔡○安	高考 電力工程 江○廷 高考 電力工程 馮○嘉 高考 電力工程 陳○宇 高考 電力工程 薛○辰 高考 電力工程 黃○喻 普考 電力工程 孫○德 普考 電力工程 吳○翰 普考 電力工程 黃○德 普考 電力工程 何○霖 普考 電力工程 許○瑜 普考 電力工程 朱○竹 普考 電力工程 洪○銓 普考 電力工程 張○維 普考 電力工程 吳○泓 普考 電力工程 王○宏 普考 電力工程 曾○維 普考 電力工程 古○芳 普考 電力工程 張○誠	普考 機械工程 范○澤 普考 機械工程 常○倫 普考 機械工程 林○彬 普考 機械工程 陳○雄 普考 機械工程 陳○修 普考 化學工程 謝○洋 鐵路特考員級 電力工程 李○諺 鐵路特考員級 電力工程 劉○傑 鐵路特考員級 電力工程 陳○義 鐵路特考員級 電力工程 林○翔 鐵路特考員級 電力工程 顏○恒 鐵路特考員級 電力工程 簡○琪 鐵路特考員級 電力工程 蘇○正 鐵路特考員級 電力工程 謝○詳 鐵路特考員級 電力工程 蔡○ 鐵路特考員級 電力工程 陳○鈞 鐵路特考員級 電力工程 許○如	鐵路特考佐級 養路工程 邱○富 鐵路特考佐級 養路工程 薄○軒 鐵路特考佐級 養路工程 陳○同 鐵路特考佐級 養路工程 林○鈞 鐵路特考佐級 電子工程 周○傑 鐵路特考佐級 電子工程 郭○維 鐵路特考佐級 電子工程 廖○翔 鐵路特考佐級 電子工程 王○洋 鐵路特考佐級 電子工程 鍾○承 鐵路特考佐級 電子工程 陳○儒 鐵路特考佐級 電子工程 蔡○穎 鐵路特考佐級 機械工程 李○億 鐵路特考佐級 機械工程 林○潤 鐵路特考佐級 機械工程 張○祺 鐵路特考佐級 機械工程 蘇○雅 鐵路特考佐級 機械工程 石○玄 鐵路特考佐級 機械工程 陳○民	鐵路特考佐級 機械工程 賴○威 鐵路特考佐級 機械工程 徐○成 台電僱員 電鍍技術類 曾○綱 台電僱員 保健物理類 黃○妹 台電僱員 變電設備維護類 林○佑 台電僱員 機械運轉維護類 趙○瑄 台電僱員 機械運轉維護類 甯○軒 台電僱員 配電線路維護類 范○瑋 台電僱員 配電線路維護類 陳○佑 台電僱員 配電線路維護類 黃○冠 台電僱員 配電線路維護類 何○緯 台電僱員 配電線路維護類 林○豪 台電僱員 配電線路維護類 李○榮 台電僱員 配電線路維護類 蔡○晴 台電僱員 配電線路維護類 楊○凱 台電僱員 配電線路維護類 戴○霖 台電僱員 配電線路維護類 張○哲
--	--	--	---	--

版面有限，僅向未刊登者致歉

二、於真空中有一點帶正電荷 $Q=2\times 10^{-8}$ 庫倫及另一點帶負電荷 $4Q=-8\times 10^{-8}$ 庫倫，其距離為 $d=100$ 公分。

(一)畫出此兩點電荷於一直線上，並標示此直線上之電場為零位置，且予以說明。(8 分)

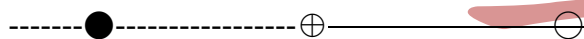
(二)計算此電場為零之位置。(12 分)

【解題關鍵】

- 1.《考題難易》★
- 2.《解題關鍵》利用電場公式，方向相反即可解題

【擬答】

(一)零電場之位置位於 Q_1 左邊， $\vec{E}_1$ 向左， $\vec{E}_2$ 向右，方向相反



$$Q_1 = 2 \times 10^{-8} \text{ C} \quad Q_2 = -8 \times 10^{-8} \text{ C}$$

$$|\vec{E}_1| = \frac{k \times 2 \times 10^{-8}}{d^2} = |\vec{E}_2| = \frac{k \times 2 \times 10^{-8}}{(d+1)^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{d}\right)^2 = \left(\frac{2}{d+1}\right)^2 \Rightarrow d = 1 \text{ m}$$

(二)

志光.學儒.保成 規劃了豐富完整的課程

精心安排專屬**工科人**的學習規劃，最完整的上榜課程

工科考試所需要的準備，我們通通幫你安排好了

法科 架構班

學校沒教的，我們教給你！
名師精解法科知識，
結合實務例子，助你建構
法科概念。

扎實 正規班

完整堂數規劃，循序漸進學
習，讓您深度修習工科各專
業學科知識。

作文 實戰班

作文再也不是理工人的痛！
透過專業老師的輔導，快速
強化您的寫作架構、邏輯概
念。

主題 題庫班

主題式教學，搭配各類試題
演練，進行考點分析及破題
要點訓練，讓您短時間各科
實力倍增。

精華 總複習

考前重點總複習，精準掌握
重要考點，讓您考前實力突
飛猛進。

時事議題 修法要點

自己沒時間彙整最新資訊
沒關係！
完整時事補充，修法即時解
析，考前重點全面補遺。

考前提要 關懷講座

名師考前最終提點，穩定你
累積許久的實力，讓你的觀
念更加清晰。

全國全真 模擬考

檢視應考實力、訓練臨場反
應、掌握最新考題趨勢，全
程比照考試時程，模擬考場
實戰氛圍，讓您能以平常心
應考！

三、於空氣中有一球形水滴，半徑為 0.1 mm ，帶有電荷，其承受電場 100 V/m 之電力和反承受之重力相同。

(一)計算水滴之電荷值。(10 分)

(二)計算水滴電荷產生之電場值。(5 分)

(三)已知空氣被打穿之電場為 $3 \times 10^6\text{ V/m}$ ，此水滴是否承受此電荷？(5 分)

【解題關鍵】

1.《考題難易》★★

2.《解題關鍵》利用電力等於重力時求出電荷，再使用電場公式

【擬答】

(一)重力等於電力之值，則 $F_g = F_e$

$$10^3 \times \frac{4}{3} \pi \times (0.1 \times 10^{-3})^3 \times 9.8 = Q \times 100 \Rightarrow Q = 4.105 \times 10^{-10} \text{ C}$$

(二)

$$E = 9 \times 10^9 \times \frac{4.105 \times 10^{-10}}{(10^{-4})^2} = 3.695 \times 10^8 \text{ V/m}$$

(三) $E = 3.695 \times 10^8 \text{ V/m} > 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ ，水滴無法承受此電荷。



我們專屬設計的學習模式， 讓你聰明學習輕鬆投考！

我們都在志光.學儒.保成 成功找到工科人的工頂人生

學習模式



面授學習

直接，有效

- 實際面對面教學，現場解決您的疑惑。
- 優質專業名師，幫您統整、分析考試重點資訊。
- 定期的大小測驗，您可隨時檢視學習效果。



雲端函授

自主，彈性

- 不用煩惱通勤問題，課程教材直接送到家。
- 反覆聽課，不怕觀念聽不懂。
- 完全自由，可自主安排學習進度。



視訊學習

便利，專注

- 安靜舒適的上課環境，提高您的專注力。
- 看課時間能自由預約，無須擔心時間衝突。
- 可依需求暫停、倒轉或快轉，深度學習超簡單。

中年失業報考公職

求職APP裡都是已讀不回，轉個念，重拾課本念書，靠自己努力去爭取一分穩定工作，贏回自己未來的人生；也為了自己的家庭、小孩繼續的打拼下去。

8個月考取 地方特考 四等機械工程 盧○偉



期望大學畢業後即就業

透過老師傾囊相授以及課程安排，很快地便對各考科有一定的程度。並從模擬考中得知是否有不熟、不懂的地方，使我更加針對不足之處加強，一次又一次成績大幅提升使人信心大增！

1年考取/應屆考取 鐵路特考 佐級機械工程 陳○謙



資源豐富幫助我很多

在朋友推薦和試聽後發現也蠻不錯的，且距離家也近，補習班有良好的讀書環境，剛開始我完全不知道該如何準備，就去問補習班的櫃台小姐，他們都很熱心的提供各種方式及管道。

高普雙榜 高普考 電力工程 蔡○霖



四、以下係有關真空內之馬克士威方程組。

(一)分別寫出以積分形式及微分形式之馬克士威方程式組，於其中各微分形式方程式旁邊寫出對應之定律名稱。(8分)

(二)於(一)小題之微分形式馬克士威方程組中，可由其中兩項旋度(curl)相關方程式及連續方程式，證明另兩項散度(divergence)相關方程式。(8分)

(三)以穩態弦波及複數形式寫出於(一)小題之微分形式馬克士威方程組。(4分)

【解題關鍵】

- 1.《考題難易》★★
- 2.《解題關鍵》瞭解 Maxwell 方程式組與連續方程式意義

【擬答】

(一)馬克士威方程式組有四個微分與積分式說明如下：

1. 法拉第電磁感應定律：
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

2. 高斯定律：
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

3. 安培定律：
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

4. 磁單極不存在與封閉曲線：
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

(二)電荷連續方程式為 $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

1. 安培定律 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ，取其散度為

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0 = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

因此驗證了高斯定律

2. 法拉第電磁感應定律 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ，取其散度為

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0 = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{B}) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

因此驗證了磁單極不存在與封閉曲線

(三) Maxwell 方程式之相量表示式

$$1. \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \mu \vec{H}$$

$$2. \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} = \vec{J} + j\omega \epsilon \vec{E}$$

$$3. \nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$4. \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$5. \nabla \cdot \vec{J} = -j\omega \rho$$

五、於真空中內有兩個正弦平面波，沿正 z 方向傳播，其入射電場以 $\vec{E}_{1i}(z,t)$ 及 $\vec{E}_{2i}(z,t)$ 表示，入射方向相同 $\hat{k}_i$ ，頻率及相位相同(即 $f_1 = f_2, \angle \vec{E}_{1i} = \angle \vec{E}_{2i}$)，此兩個正弦平面波均為圓極化，但極化方向相反。

(一) 寫出各圓極化平面波之入射電場向量表示式，並畫出直角座標，標示各入射電場向量、各極化方向及入射傳播方向 $\hat{k}_i$ 。(8 分)

(二) 寫出完整之入射電場向量表示式。(2 分)

(三) 若 $\vec{E}_{1i}(z,t) = \vec{E}_{2i}(z,t)$ 時，此完整之入射平面波極化為何？若 $\vec{E}_{1i}(z,t) \neq \vec{E}_{2i}(z,t)$ 時，此完整之入射平面波極化為何？(2 分)

(四) 當(一)小題之兩個圓極化平面波正向垂直入射一無限大金屬面，其導電係數(conductivity) $\sigma = \infty$ ，寫出各圓極化平面波之反射電場 $\vec{E}_{1r}(z,t)$ 及 $\vec{E}_{2r}(z,t)$ 表示式，並於(一)小題之同一圖上畫出各反射電場向量，標示各極化方向及反射傳播方向 $\hat{k}_r$ 。(4 分)

(五) 寫出完整之全部(含入射及反射)電場向量表示式，此為行進波或駐波？(4 分)

【解題關鍵】

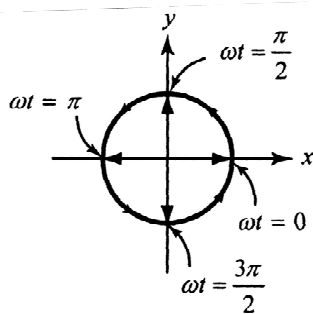
1. 《考題難易》★★★

2. 《解題關鍵》瞭解極化種類與意義即可解題

【擬答】

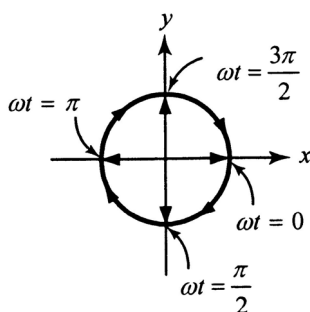
(一) 若 $\vec{E}_{1i}(z,t)$ 為右手圓極化波，入射電場向量表示式為 $\vec{E}_{1i}(z) = E_{1i0} \left[\vec{x} e^{-jk_i z} - j \vec{y} e^{-jk_i z} \right]$

如圖所示



若 $\vec{E}_{2i}(z,t)$ 為右手圓極化波，入射電場向量表示式為 $\vec{E}_{2i}(z) = E_{2i0} \left[\vec{x} e^{-jk_i z} + j \vec{y} e^{-jk_i z} \right]$

如圖所示



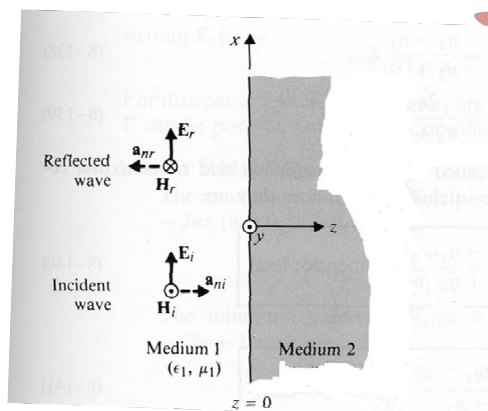
$$(二) \quad \vec{E}_{1i}(z,t) = E_{1i0} \left(\vec{x} \cos(\omega t - k_i z) + \vec{y} \sin(\omega t - k_i z) \right) ; \quad \vec{E}_{2i}(z,t) = E_{2i0} \left(\vec{x} \cos(\omega t - k_i z) - \vec{y} \sin(\omega t - k_i z) \right)$$

(三) 若 $\vec{E}_{1i}(z,t) = \vec{E}_{2i}(z,t)$ 時， $\hat{x}E_x = \frac{1}{2}(\hat{x}E_x - \hat{y}jE_y) + \frac{1}{2}(\hat{x}E_x + \hat{y}jE_y)$ 為線性極化平面波。

$$\text{若 } \vec{E}_{1i}(z,t) \neq \vec{E}_{2i}(z,t) \text{ 時， } \hat{x}E_1 - \hat{y}jE_2 = \left(\hat{x} \frac{E_1 + E_2}{2} - \hat{y}j \frac{E_1 + E_2}{2} \right) + \left(\hat{x} \frac{E_1 - E_2}{2} + \hat{y}j \frac{E_1 - E_2}{2} \right)$$

為橢圓極化平面波。

(四) 入射於 $z=0$ 之理想導體面，如圖所示



$$\vec{E}_1(z=0) = 0 \Rightarrow E_{r0} = -E_{i0}$$

$$\vec{E}_{1r}(z) = \vec{E}_{i0} (-\hat{x} e^{+jk_i z} + j \vec{y} e^{+jk_i z}) ;$$

$$\vec{E}_{2r}(z) = \vec{E}_{2i0} (-\hat{x} e^{+jk_i z} - j \vec{y} e^{+jk_i z})$$

(五) $\vec{E}_1(z) = \vec{E}_i(z) + \vec{E}_r(z) = -\hat{x}(2 + j2)E_{i0} \sin k_i z$ ，為駐波

$$\vec{E}_2(z) = \vec{E}_i(z) + \vec{E}_r(z) = -\hat{x}(2 - j2)E_{2i0} \sin k_i z$$

志光.學儒.保成

高普考
地方特考

工頂題庫班

最強 3 階段課程

歸納歷屆經典考題，一步一步強化你的實力，就是要你上榜



我是工科人，我工頂啦！

由於考試的題目非常靈活，參加題庫班，除了勤做考古題外，大量實作解說，很快速地強化我的考前記憶，每做一道題目馬上能判斷是在哪一章節，然後再逕行解題。

一年考取 109 普考 電子工程 曾○維



職王