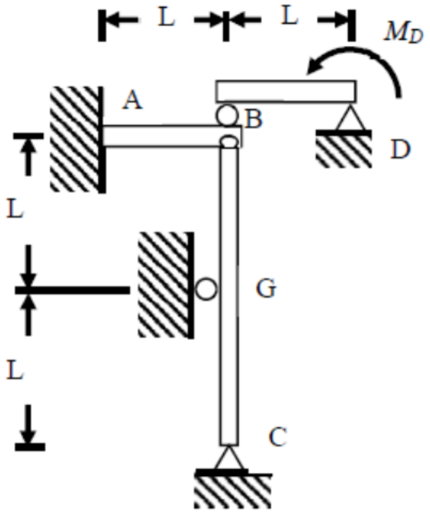
109 年特種考試地方政府公務人員考試試題

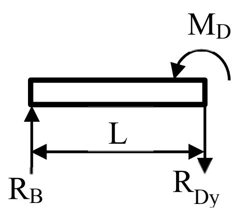
等　別：四等考試
類　科：　機械工程
科　目：機械力學概要

一、長 L 的懸臂梁 AB 中，A 點為固定端，在 B 點處用插銷（Pin）方式與長 $2L$ 的柱子 BGC 連接，其中 C 點為一鉸支撐（Hinge），在 G 點有滑輪作側撐。另外，懸臂梁在 B 點處亦承托著長 L 簡支梁 BD 在左端的滑輪，且簡支梁在 D 點承受一力矩 M_D。令所有桿件的楊氏係數為 E 及彎曲慣性力矩為 I，柱子 BGC 的斷面面積為 A。若梁 AB 的軸向變形可忽略不計，試求當柱子 BGC 產生挫屈（Buckling）時的最小 M_D（用 E, A, I, L 來表示；忽略所有桿件的重量）。（20 分）

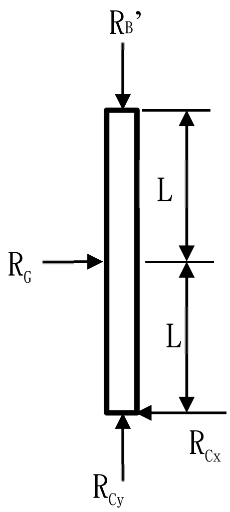


【解題關鍵】
《考題難易》：★★★。
《破題關鍵》：柱的挫曲歷年來幾乎不曾出現過，今年的題目考由細長柱之彈性臨界挫屈載重，雖然是代公式可知，但是仍算是很冷門的題目。

【擬答】



BD 的自由體圖



BGC 的自由體圖

㈠1. 取 BGC 的自由體圖

由細長柱之彈性臨界挫屈載重公式可知：當柱之上下兩端均為銷接端時，則柱之有效長度係數 K 值為 1

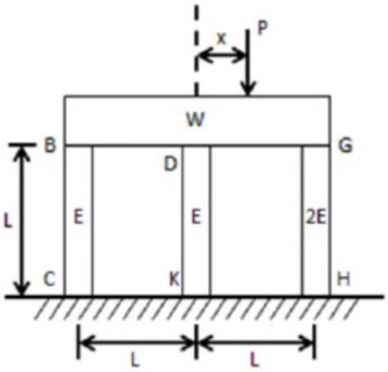
$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}\Rightarrow R_B=\frac{\pi^2 EI}{(1\times L)^2}$$

㈡取 BD 的自由體圖

$\sum M_D=0+\circlearrowleft\Rightarrow M_D-R_B\times L=0$　$\therefore M_D=R_B\times L=\frac{\pi^2 EI}{(L)^2}\times L=\frac{\pi^2 EI}{L}$

ANS：試求當柱子 BGC 產生挫屈（Buckling）時的最小 $M_D=\frac{\pi^2 EI}{L}$ 。

二、一重 *W* 的剛板由三根原長 *L* 及斷面積 *A* 的柱子（BC, DK, GH）支撐著，其中 BC 和 DK 的楊氏係數為 *E*，GH 的楊氏係數為 2*E*。若要維持剛板水平，需施垂直力 *P* 在剛板上。試求 *P* 與剛板中心的距離 *x*（請用 *P,W, L,A, E* 來表示）。（20 分）



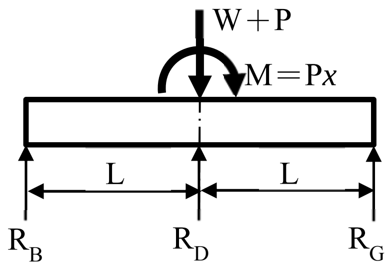
【解題關鍵】

《考題難易》：★★★★。

《破題關鍵》：靜不定桿件軸向受力後的變形，因為題目提到剛性板仍然保持水平，所以 BDG 三點變形量相同，再配合靜力學公式($\sum F_y=0$及$\sum M=0$)就可以解題。

題型雖然是靜不定桿件軸向受力後的變形，但是這類的題目在往年的試題中並不曾出現過，所以並不容易立即想到解題的方法。

【擬答】



㈠靜力平衡(取剛板的自由體圖)

$\sum F_y=0\uparrow+\Rightarrow R_B+R_D+R_G-P-W=0\cdots\cdots\cdots(1)$

$\sum M_D=0+\circlearrowleft\Rightarrow R_G\times L-R_B\times L-M=0\cdots\cdots\cdots(2)$

㈡因為要維持剛板水平，所以 B、D、G 的變形量(△)相同，因為 BC 柱和 DK 柱的楊氏係數為 E，GH 柱的楊氏係數是 2E，剛板變形必須維持線性，所以可以知道：

$$\delta_B=\delta_D=\delta_G\Rightarrow\frac{R_B\times L}{A\times E}=\frac{R_D\times L}{A\times E}=\frac{R_G\times L}{A\times(2E)}=\Delta \qquad \therefore R_B=R_D=\frac{R_G}{2}\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)代入(1)

$$(3)代入(1)\Rightarrow\frac{R_G}{2}+\frac{R_G}{2}+R_G=P+W\Rightarrow 2R_G=(P+W)\Rightarrow R_G=\frac{(P+W)}{2}$$

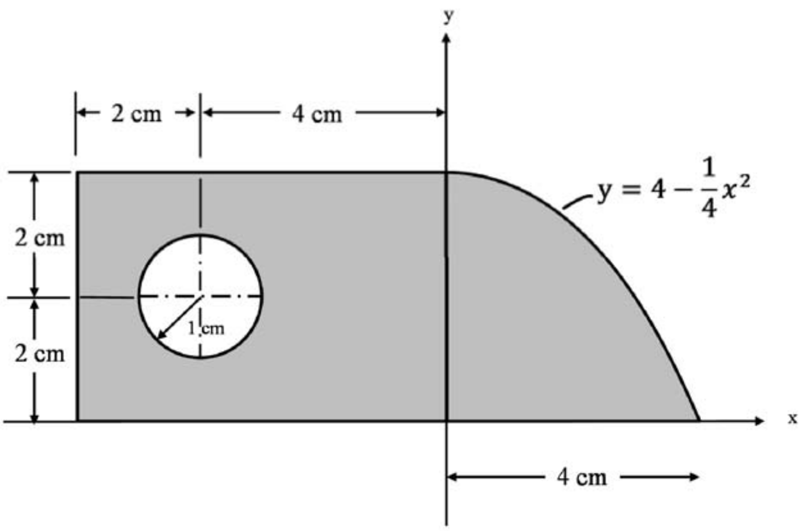
$$R_B=R_D=\frac{R_G}{2}=\frac{(P+W)}{4}\ 代入(2)$$

$$\Rightarrow M=R_G\times L-R_B\times L=\frac{(P+W)}{2}\times L-\frac{(P+W)}{4}\times L=P\times x$$

$$\therefore x=\frac{(P+W)\times L}{4P}$$

ANS：P 與剛板中心的距離 $\chi=\dfrac{(P+W)\times L}{4P}$

三、平面面積中含一中空圓形，試求該面積的形心在 x 座標軸的位置。（20 分）



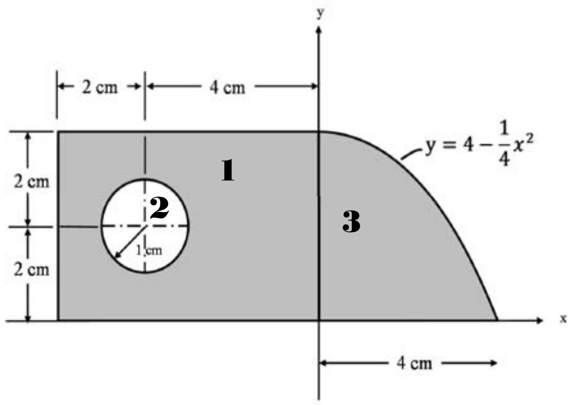
【解題關鍵】

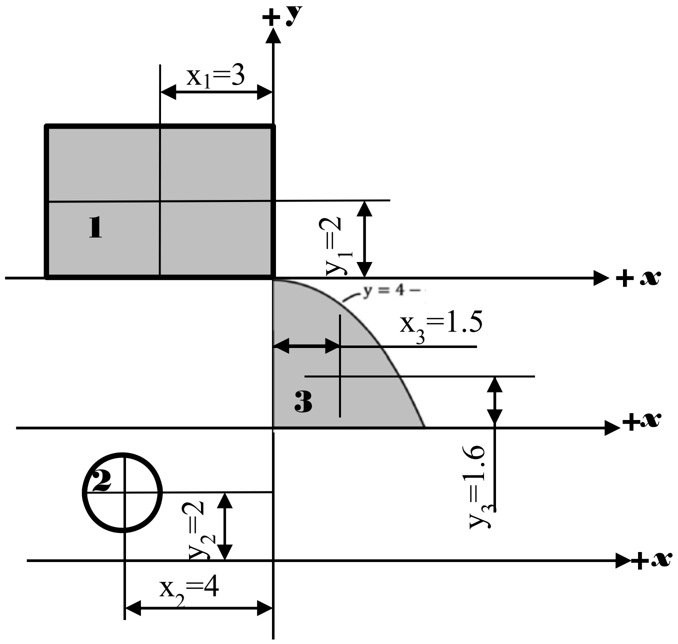
《考題難易》：★★。

《破題關鍵》：先分別算出矩形、圓形與曲面的面積，而曲面面積 dA=$x$dy

，$\bar{x}=\dfrac{\int x\,dA}{A}$，$\bar{y}=\dfrac{\int y\,dA}{A}$，再代入公式 $\overline{X}=\dfrac{\Sigma AiXi}{\Sigma Ai}$、$\overline{Y}=\dfrac{\Sigma AiYi}{\Sigma Ai}$ 求解。

【擬答】





㈠求面積

$$A_1 = 6\times 4 = 24(cm^2)，A_2 = \frac{\pi\times 1^2}{4} = 0.785(cm^2)$$

$$A_3 = \int_0^4 ydx = \int_0^4 (4 - \frac{1}{4}x^2)dx = 4x - \frac{1}{4\times 3}x^3 \Big|_0^4 = 4\times 4 - \frac{4^3}{12} = \frac{32}{3} = 10.667(cm^2)$$

㈡面積 3 的形心位置

$$y = 4 - \frac{1}{4}x^2 \rightarrow x^2 = 16 - 4y \rightarrow x = 2(4 - y)^{\frac{1}{2}}$$

$$\chi_3 = \frac{\int_0^4 xdA}{A} = \frac{\int_0^4 (ydx)}{A} = \frac{\int_0^4 4x - \frac{1}{4}x^3dx}{A} = \frac{\frac{4}{2}x^2 - \frac{1}{4\times 4}x^4}{A} = \frac{16}{\frac{32}{3}} = 1.5(cm)$$

$$(4 - y)^{\frac{1}{2}} = u \rightarrow u^2 = 4 - y \rightarrow y = 4 - u^2 \Rightarrow dy = -2udu$$

$$y = 4 \rightarrow u = 0，y = 0 \rightarrow u = 2$$

$$\int_0^4 ydA = \int_0^4 y(xdy) = \int_2^0 (4 - u^2)(2u)(-2u)du$$

$$= \int_2^0 4u^4 - 16u^2du = \frac{4}{5}u^5 - \frac{16}{3}u^3\Big|_2^0 = \frac{256}{15}$$

$$y_3 = \frac{\int_0^4 ydA}{A} = \frac{\frac{256}{15}}{\frac{32}{3}} = 1.6(cm)$$

⑶組合面積之形心位置：

$$\bar{\chi} = \frac{A_1\times x_1 - A_2\times x_2 + A_3\times x_3}{A_1 - A_2 + A_3} = \frac{24\times(-3) - 0.785\times(-4) + 10.667\times 1.5}{24 - 0.785 + 10.667}$$

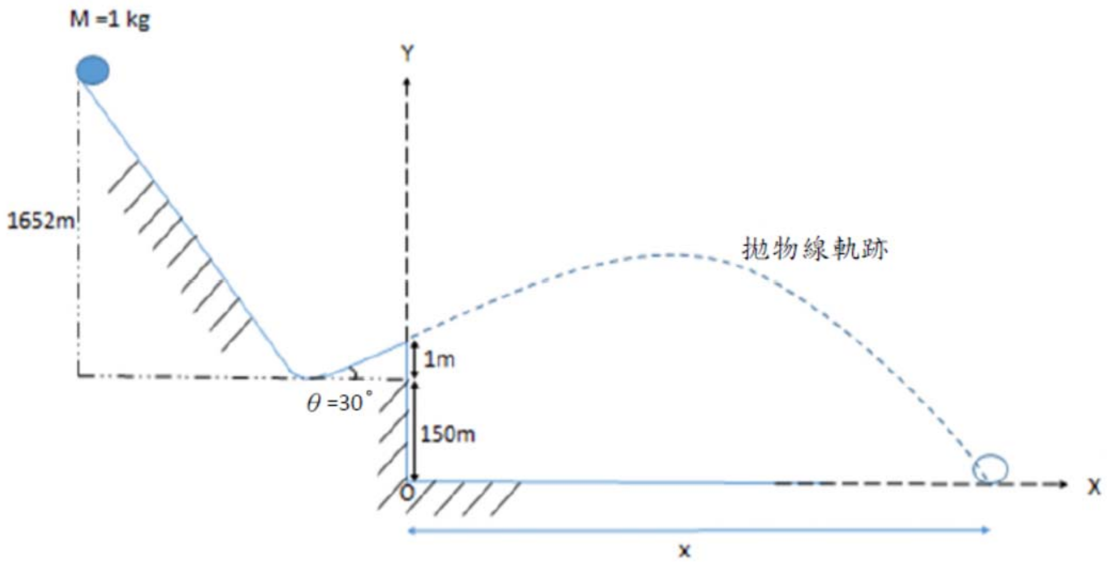
$$\bar{\chi} = \frac{-52.86}{33.88} = -1.56(cm)$$

$$\bar{y} = \frac{A_1\times y_1 - A_2\times y_2 + A_3\times y_3}{A_1 - A_2 + A_3} = \frac{24\times 2 - 0.785\times 2 + 10.667\times 1.6}{24 - 0.785 + 10.667}$$

$$\bar{y}=\frac{63.50}{33.88}=1.87(cm)$$

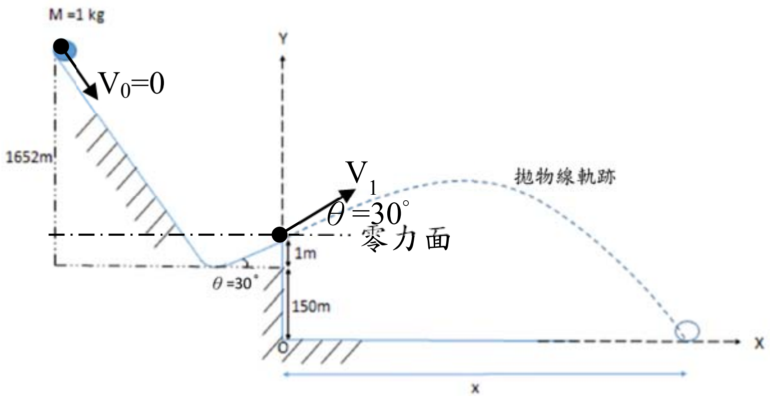
ANS：該面積的形心在 $\bar{x}=-1.56(cm)$，$\bar{y}=1.87(cm)$

四、一質量為 **1 kg** 的剛球由靜止狀態從一滑坡滾下，而球離開滑坡的角度為 **30°**。若不考慮摩擦及空氣阻力，並令重力加速度 **g=9.81m/s2**。試求取剛球落地時的水平距離 *x*。（**20** 分）



【解題關鍵】
《考題難易》：★★。
《破題關鍵》：利用力學能守恆可以求出拋射的初速度，再利用斜向拋體可以計算出落地時間與最大水平射程。

【擬答】



⑴根據力學能守恆

$$Ug_0=Ek_1\Rightarrow mgH=\frac{1}{2}mV_1^2\Rightarrow V_1=\sqrt{2gH}=\sqrt{2\times9.81\times(1652-1)}=179.98(m/\sec)$$

⑵設落地的時間 T(注意向上為正)

$$-H=V_1\sin\theta\times T+\frac{1}{2}gT^2\Rightarrow-(1+150)=197.98\times\sin30^\circ\times T-\frac{1}{2}\times9.81\times T^2$$

$$T^2-20.18T+30.78=0 \Rightarrow T=\frac{+20.18\pm\sqrt{(-20.18)^2-4\times1\times30.78}}{2\times1}=\frac{20.18\pm16.86}{2}$$

∴T=18.52(sec)或是 1.66(sec)

斜向拋射到最高點時間(t)

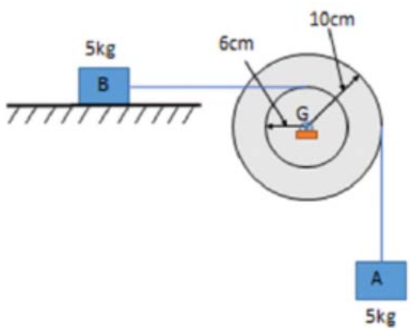
$$t=\frac{V_1\sin\theta}{g}=\frac{197.98\times\sin30^\circ}{9.81}=9.173(\text{sec})$$，故 1.66(sec)不合。

(3)最大水平射程 x：

$$x=V_1\cos\theta\times T=197.98\times\cos30^\circ\times18.52=3175.36(m)$$

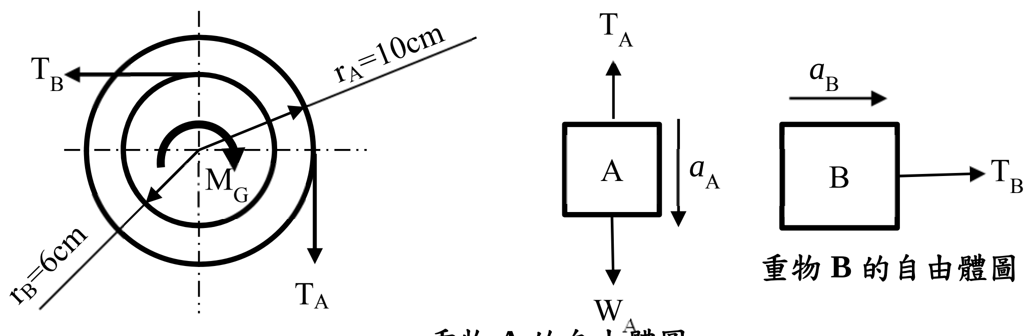
ANS：剛球落地時的水平距離 $x=3175.36(m)$

五、一質量為 10 kg 的滑輪，其迴轉半徑（Radius of gyration）為 20 cm。在滑輪的內外半徑分別用繩連接兩重物 A 和 B，其中重物 B 是放置在一平滑台上，且 A 及 B 的質量均為 5 kg。在初始靜止狀況下，若突然放開 A，試求重物 A 和 B 的加速度。（滑輪軸承的摩擦忽略不計；重力加速度 g=9.81m/s²。）（20 分）



【解題關鍵】
《考題難易》：★★。
《破題關鍵》：剛體動力學，分別先畫出滑輪 G、重物 A 與重物 B 的自由體圖，再套用剛體的牛頓第二運動定律 $\sum M_G=I_G\times\alpha$，及迴轉運動之 $a_T=r\times\alpha$ 的公式解題。

【擬答】



滑輪 G 的自由體圖　重物 A 的自由體圖　重物 B 的自由體圖

(1)取重物 A 的自由體圖

$$m_{Ag}-T_A=m_A\times a_A 又 a_A=r_A\times\alpha \therefore m_{Ag}-T_A=m_A\times(r_A\times\alpha)$$

$$\therefore T_A=m_{Ag}=m_A\times(r_A\times\alpha)\ldots\ldots\ldots(1)$$

(2)取重物 B 的自由體圖

$$T_B=m_B\times a_B 又 a_B=r_A\times\alpha \therefore T_B=m_B\times(r_B\times\alpha)\ldots\ldots\ldots(2)$$

⑶取滑輪 G 的自由體圖

$$\sum M_G = I_G \times \alpha \Rightarrow T_A \times r_A - T_B \times r_B = I_G \times \alpha = \frac{1}{2} \times m_G \times R^2 \times \alpha \ldots\ldots\ldots(3)$$

⑷將式⑴與⑵代入式⑶中得

$$[m_{Ag} - m_A \times (r_A \times \alpha)] \times r_A - [m_B \times (r_B \times \alpha)] \times r_B = (\frac{1}{2} \times m_G \times R^2) \times \alpha$$

$$\Rightarrow (5 \times 9.81 - 5 \times 0.1 \times \alpha) \times 0.1 - (5 \times 0.06 \times \alpha) \times 0.06 = (\frac{1}{2} \times 10 \times 0.2^2) \times \alpha$$

$$\Rightarrow 4.905 - 0.05\alpha - 0.018\alpha = 0.2\alpha \quad \therefore \alpha = 18.3(\text{rad/sec}^2)$$

⑸重物 A 與 B 的加速度

$a_A = r_A \times \alpha = 0.1 \times 18.3 = 1.83(\text{m/sec}^2)$

$a_B = r_B \times \alpha = 0.06 \times 18.3 = 1.098(\text{m/sec}^2)$

ANS：重物 A 和 B 的加速度分別為$a_A 1.83(\text{m/sec}^2)$，$a_B = 1.098(\text{m/sec}^2)$
。