

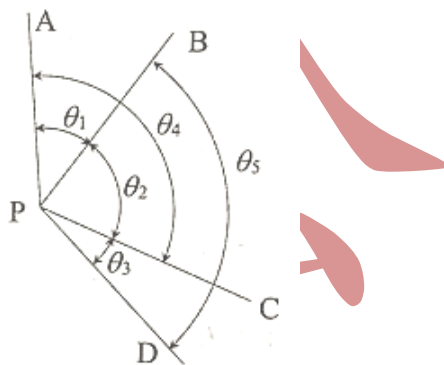
109 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試

類 科：土木工程

科 目：平面測量與施工測量

一、於點 P 擺置經緯儀做一多角度觀測，測得角度 $\theta_1 = 30.000^\circ$ 、 $\theta_2 = 70.000^\circ$ 、 $\theta_3 = 20.000^\circ$ 、 $\theta_4 = 100.001^\circ$ 、 $\theta_5 = 90.002^\circ$ ，如下圖。試以平差角度觀測值，以求各角度之最或是值及其中誤差。(25 分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：條件觀測平差。重點提要：測量平差法。

【命中特區】

書名：測量製圖 測量平差法

作者：賴明

章節出處：第六章 條件觀測平差 之二、條件方程式之求解與精度分析

【擬答】：

已知： $\theta_1 = 30.000^\circ$ 、 $\theta_2 = 70.000^\circ$ 、 $\theta_3 = 20.000^\circ$ 、 $\theta_4 = 100.001^\circ$ 、 $\theta_5 = 90.002^\circ$

採用測量平差法之條件觀測平差，進行求解。

(一)計算各角度之最或是值

1. 條件方程式

改正數方程式

$$\begin{cases} \theta_1 + v_1 + \theta_2 + v_2 - (\theta_4 + v_4) = 0 \\ \theta_2 + v_2 + \theta_3 + v_3 - (\theta_5 + v_5) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 + v_2 - v_4 + (\theta_1 + \theta_2 - \theta_4) = 0 \\ v_2 + v_3 - v_5 + (\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) = 0 \end{cases}$$

又， $\theta_1 + \theta_2 - \theta_4 = 30.000^\circ + 70.000^\circ - 100.001^\circ = -0.001^\circ = -3.6''$

$\theta_2 + \theta_3 - \theta_5 = 70.000^\circ + 20.000^\circ - 90.002^\circ = -0.002^\circ = -7.2''$

$$\therefore \begin{cases} v_1 + v_2 - v_4 - 3.6'' = 0 \\ v_2 + v_3 - v_5 - 7.2'' = 0 \end{cases}$$

2. 矩陣式： $BV + W = 0$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ， $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$ ， $W = \begin{bmatrix} -3.6 \\ -7.2 \end{bmatrix}$

3. 列法方程式： $M = BB^T$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, M^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. 列關連值向量： $K = -M^{-1}W$ ， $K = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3.6 \\ -7.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 2.25 \end{bmatrix}$

5. 計算改正數： $V = B^T K$ ， $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.45 \\ 2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 2.7 \\ 2.25 \\ -0.45 \\ -2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$

6. 計算 5 個角度的最或是值

$$\hat{\theta}_1 = \theta_1 + v_1 = 30^\circ 00' 0.45''$$

$$\text{同理，} \hat{\theta}_2 = 70^\circ 00' 2.7''$$

$$\hat{\theta}_3 = 20^\circ 00' 2.25''$$

$$\hat{\theta}_4 = 100^\circ 00' 3.6'' - 0.45'' = 100^\circ 00' 3.15''$$

$$\hat{\theta}_5 = 90^\circ 00' 7.2'' - 2.25'' = 90^\circ 00' 4.95''$$

(二) 計算各角度之中誤差

1. $V^T V = 0.45^2 + 2.7^2 + 2.25^2 + (-0.45)^2 + (-2.25)^2 = 17.82$

觀測數 $m=5$ ，未知數 $n=3$ ，多於觀測數(自由度) $r = m - n = 5 - 3 = 2$

單位權中誤差： $\hat{\sigma}_o = \pm \sqrt{\frac{V^T V}{r}} = \pm \sqrt{\frac{17.82}{2}} = \pm 2.985''$

2. 精度分析

等權觀測，平差後觀測量之變方-協變方矩陣 $\Sigma_{\hat{L}_a}$ ： $\Sigma_{\hat{L}_a} = \hat{\sigma}_o^2 \cdot (I - B^T M^{-1} B)$

$$I - B^T M^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ \text{對稱} & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= I - \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = I - \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ & 4 & 2 & -2 & -2 \\ & & 3 & 1 & -3 \\ \text{對稱} & & & 3 & -1 \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$$

對角線 5 個元素之值，分別為 $\frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}$

5 個角度之中誤差： $\sigma_{\hat{\theta}_1} = \pm \hat{\sigma}_o \times \sqrt{\frac{5}{8}} = \pm 2.985 \times \sqrt{\frac{5}{8}} = \pm 2.36'' = \sigma_{\hat{\theta}_3} = \sigma_{\hat{\theta}_4} = \sigma_{\hat{\theta}_5}$

$\sigma_{\hat{\theta}_2} = \pm \hat{\sigma}_o \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm 2.985 \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm 2.11''$

二、光達(LiDAR, light detection and ranging)與攝影測量(photogrammetry)是目前二種大面積地形測量的主要光學遙測技術，試就其測量原理、載具、原始量測數據、主被動性、天候限制，比較二者異同。(25分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：光達、攝影測量。重點提要：測量原理、載具、原始量測數據。

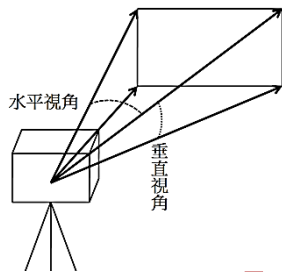
【擬答】：

(一)光達：

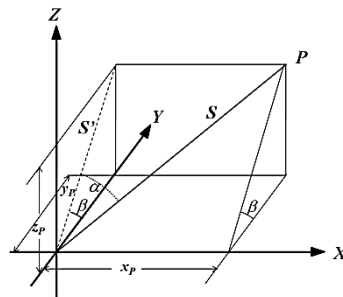
光達是利用雷射光，對目標物進行高密度且高精度的掃描，以獲取目標物三維地貌的技術。

1. 測量原理

- (1) 光達係使用三維雷射掃描儀，利用雷射測距的方式，以固定的頻率針對場景進行掃描，加上定位定向系統，以獲取高精度的點雲資料(三維點群的坐標)，以及感測物的回傳訊息(反射雷射光的強度)。
- (2) 其定位方法為光線法：以 3D 雷射掃描儀為中心的坐標系來定義儀器坐標系。根據雷射掃描儀對於被測物體所取得之量度資訊，來計算出被測物體的三維坐標。再經由坐標轉換的方式，將儀器坐標系的坐標，轉換至法定座標(TWD97 與 TWVD2001)。
- (3) 3D 雷射掃描儀定義的儀器坐標系，是以雷射發射中心為坐標原點，根據右手定則定義：雷射掃描儀右方為 X 軸，掃描方向(景深)為 Y 軸，雷射掃描儀上方為 Z 軸。
- (4) 掃描原理：為一個測角和測距的量測系統，由距離和角度觀測值，計算推求每點的儀器坐標系的坐標。茲以橫掃式的掃描方式為例，說明如下：



橫掃式



點位的分析計算

- ① 掃描方式是先固定垂直反射稜鏡，使 3D 雷射掃描儀由左至右進行水平方向上的掃描。然後改變垂直反射稜鏡角度，亦由左至右進行水平掃描。
- ② 橫掃式之 3D 雷射掃描儀觀測值包括：水平掃描角 α ，垂直掃描角 β ，3D 雷射掃描儀到掃描點 P 的斜距 S，由其幾何關係，定義點位 P 在掃描坐標系的坐標如下：

$$S' = S \times \cos \alpha, \quad x_p = S \times \sin \alpha, \quad y_p = S' \times \cos \beta = S \times \cos \alpha \times \cos \beta$$

$$z_p = S' \times \sin \beta = S \times \cos \alpha \times \sin \beta$$

2. 載具：光達可區分為空載光達與地面光達。空載光達的載具是飛機(空載光達)或衛星(星載光達)，地面光達的載具是車輛(車載光達)。
3. 原始量測數據：斜距、水平掃描角、垂直掃描角。
4. 主被動性：光達是主動式量測
5. 天候限制：光達觀測，不需要可見光源，能夠 24 小時全天候作業。

(二)攝影測量

攝影測量是一種利用被攝物體影像，來重建物體空間位置和三維形狀的技術。

1. 測量原理

- (1) 後方交會階段：在飛機上裝載量測型相機，於空中攝影後，透過地面控制測量、重疊像對及光束法空中三角平差演算，恢復拍攝瞬間相機的姿態(三軸旋轉角)與位置(三維坐標值)。
- (2) 前方交會階段：以相機參數為基礎，解算所拍攝影像物體之物方空間坐標。
- (3) 近景攝影測量：使用相機於地面對特定目標物件進行立體像對攝影後，進行影像之三維模型重建，藉以獲取物件之三維空間坐標，達到點位量測及物件三維建模之目的。
2. 載具：航空攝影測量的載具是飛機，無人飛行系統的載具是無人機 UAV，遙感探測的載具是衛星。
3. 原始量測數據：相片、數位影像。

公職王歷屆試題 (109 地方特考)

4.主被動性：攝影測量是被動性。

5.天候限制：攝影測量是在像片上，進行量測與判釋，無須接觸被測目標物，因此很少受到自然環境的限制。

志光.志聖.學儒 土木技師/公職.國營土木工程/土木研究所

土木人快速上榜

面授/視訊/在家補課
雲端函授 多元輔考

3 9-10月 奪榜題庫班
歷屆試題授課
強化答題架構

1 11月 基礎先修班
重點導論及
理論架構學習

4 11月 考前總複習
命題焦點+重要觀念
加強複習及提示

2 12-8月 完整正規班
詳細建構觀念+
深度論點闡述

※土木技師課程為例

金榜.王○銘
應屆考取
高考土木工程+土木技師

金榜.王○鈞
高普考土木工程
雙料金榜

推薦志聖除了師資優秀外，真
的事後的複習與補課的方式，
讓我覺得超便利。

補習班系統性的重點加上授課
老師精闢的講解，讓我更容易
吸收如願金榜題名。

材料力學公式
線上立即看

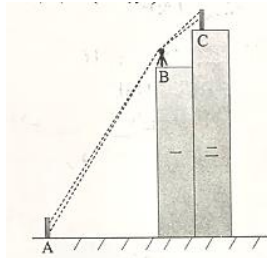
最新考情&優惠
LINE 好友洽詢

土木技師
最新詳解

豐富資源 上榜技巧 專業團隊

獨家『大滿貫課程』 一次報名
公職證照研究所 一次搞定

三、擺置經緯儀於大樓一樓頂之測點 B，測得儀器高為 $1.55m$ ，觀測置於地面點 A 之標尺，測得二俯角 $61^{\circ}45'00''$ 、 $62^{\circ}15'00''$ 對應之標尺讀數分別為 $2.18m$ 、 $0.58m$ 。另於大樓二樓頂之測點 C 置一標尺，測得二俯角 $45^{\circ}30'00''$ 、 $44^{\circ}45'00''$ ，其對應之標尺讀數分別為 $2.08m$ 、 $1.55m$ ，如下圖。試求大樓一及大樓二之樓高。(25 分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：三角高程，雙高法。重點提要：俯角觀測， i, t 的正負號要變號。

【命中特區】

書名：土木 測量學

作者：賴明

章節出處：第四章 角度測量 之 第3節 間接高程測量 之一、三角高程測量

【擬答】：

已知：儀器高 $i=1.55m$

(一)計算大樓一高度 H_1

觀測值： $\theta_1 = 61^{\circ}45'00''$ ， $\theta_2 = 62^{\circ}15'00''$ 。標尺讀數 $t_1 = 2.18m$ ， $t_2 = 0.58m$

假設：水平距離為 D

$$\begin{cases} V_1 = D \cdot \tan \theta_1 \\ V_2 = D \cdot \tan \theta_2 \end{cases}, V_2 - V_1 = D \times (\tan \theta_2 - \tan \theta_1), D = \frac{V_2 - V_1}{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}$$

又, $V_2 - V_1 =$ 標尺讀數之差值 $= 2.18 - 0.58 = 1.60m$

$$\therefore D = \frac{1.60}{\tan 62^\circ 15' 00'' - \tan 61^\circ 45' 00''} = 40.407m$$

$$H_1 = V_1 - i + t_1 = D \cdot \tan \theta_1 - i + t_1 = 40.407 \times \tan 61^\circ 45' 00'' - 1.55 + 2.18 = 75.83m$$

\therefore 大樓一高度 $= 75.83m$

(二) 計算大樓二高度 H_2 : 由圖 $H_2 = H_1 + \Delta h$, Δh 為大樓二與大樓一之高度差值

觀測值: $\alpha_1 = 45^\circ 30' 00''$, $\alpha_2 = 44^\circ 45' 00''$ 。標尺讀數 $t_1 = 2.08m$, $t_2 = 1.55m$

假設: 水平距離為 d

$$\begin{cases} V_1 = d \cdot \tan \alpha_1 \\ V_2 = d \cdot \tan \alpha_2 \end{cases}, V_1 - V_2 = d \times (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2), d = \frac{V_1 - V_2}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}$$

又, $V_1 - V_2 =$ 標尺讀數之差值 $= 2.08 - 1.55 = 0.53m$

$$\therefore d = \frac{0.53}{\tan 45^\circ 30' 00'' - \tan 44^\circ 45' 00''} = 20.155m$$

$$V_1 = d \cdot \tan \alpha_1 = 20.155 \times \tan 45^\circ 30' 00'' = 20.510m$$

$$\Delta h = V_1 + i - t_1 = 20.510 + 1.55 - 2.08 = 19.98m$$

$$H_2 = H_1 + \Delta h = 75.83 + 19.98 = 95.81m$$

\therefore 大樓二高度 $= 95.81m$

四、已知 $AC = 460.10m$ 、 $BC = 370.55m$, A 點 (E, N) 坐標為 (355168m, 2769437m), 於 B 點 (E, N) 坐標為 (355008m, 2769077m)。

(一) 試求在 A、B 兩點北方之 C 點坐標。(20 分)

(二) 此為何種交會法?(5 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字: 坐標。重點提要: 距離交會法。

【命中特區】

書名: 土木 測量學

作者: 賴明

章節出處: 第一章 測量概論之 第 4 節 測量基本計算與原理之 二、測量的基本原理

【擬答】:

(一) 計算在 A、B 兩點北方之 C 點坐標

A、B 二點的相對位置, 示意如右圖。

1. 由 A、B 二點坐標, 計算距離 \overline{AB} , 方位角 ϕ_{AB}

$$\Delta E_{AB} = E_B - E_A = 355008 - 355168 = -160m < 0$$

$$\Delta N_{AB} = N_B - N_A = 2769077 - 2769437 = -360m < 0$$

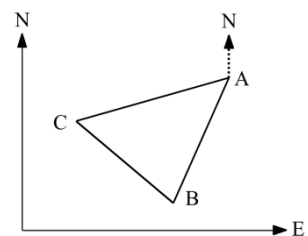
$$\overline{AB} = \sqrt{(\Delta E_{AB})^2 + (\Delta N_{AB})^2} = \sqrt{(-160)^2 + (-360)^2} = 393.95m$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{\Delta E_{AB}}{\Delta N_{AB}} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-160}{-360} \right| = 23^\circ 57' 45'', \text{ 第三象限}$$

$$\phi_{AB} = 180^\circ + \theta = 180^\circ + 23^\circ 57' 45'' = 203^\circ 57' 45''$$

2. 由餘弦定律, 計算 $\angle A$ ($\angle BAC$)

$$\cos \angle A = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{AC}}, \cos \angle A = \frac{393.95^2 + 460.10^2 - 370.55^2}{2 \times 393.95 \times 460.10} = 0.6333054$$



公職王歷屆試題 (109 地方特考)

$$\therefore \angle A = 50^\circ 42' 20''$$

3. 計算 AC 邊方位角 ϕ_{AC}

$$\text{由示意圖, } \phi_{AC} = \phi_{AB} + \angle A = 203^\circ 57' 45'' + 50^\circ 42' 20'' = 254^\circ 40' 05''$$

4. 計算 C 點坐標: $C(E_C, N_C)$

$$E_C = E_A + \overline{AC} \cdot \sin \phi_{AC} = 355168 + 460.10 \times \sin 254^\circ 40' 05'' = 354724.3m$$

$$N_C = N_A + \overline{AC} \cdot \cos \phi_{AC} = 2769437 + 460.10 \times \cos 254^\circ 40' 05'' = 2769315.3m$$

$$\therefore C \text{ 點坐標: } C(E_C, N_C) = (254724.3m, 2769315.3m)$$

(二) 此為距離交會法

公 職 王