

109 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試
類 科：資訊處理
科 目：資料結構

甲、申論題部分

一、請設計演算法複製一棵二元樹 (copy a binary tree)。(10 分)

《考題難易》：★★★★

《破題關鍵》：二元樹演算法變化題，參考108高考類似題修改得解。

【擬答】

```
public TreeNode cloneTree(TreeNode root) {  
    if (root == null) return null;  
    TreeNode newNode = new TreeNode(root.val);  
    newNode.left = cloneTree(root.left);  
    newNode.right = cloneTree(root.right);  
    return newNode;  
}
```

二、(一)請描述 order 為 m 的 B-tree 之特性。(6 分)

(二)請問 order 為 m 高度為 h 的 B-tree：(1)最多有幾個節點？最多有幾個 Key？(6 分) (2)最少有幾個節點？最少有幾個 Key？(8 分)

《考題難易》：★★★★

《破題關鍵》：B-tree 觀念題，了解 B-tree 定義即可推導得解。

【擬答】

(一) B-樹是一個空樹，或是高度大於等於 1 且滿足下列條件的 m 向搜尋樹：

1. 樹根節點至少有二個子節點。
2. 除樹根節點與失敗節點外所有節點至少要有 $\lceil m/2 \rceil$ 個子節點。
3. 所有失敗節點均在同一 level。

(二)

1. 高度為 h 的 B-樹最多擁有 $1+m+m^2+\dots+m^{(h-1)}=\frac{m^h-1}{m-1}$ 個節點，也就是公比為 m ，首項為 1，且共有 h 項的等比級數；由於每個節點至多有 $(m-1)$ 個鍵值，因此最多共有 m^h-1 個鍵值。

2. 高度為 h 的 B-樹最少擁有 $1+2(\lceil m/2 \rceil+\lceil m/2 \rceil^2+\dots+\lceil m/2 \rceil^{(h-2)})=1+\frac{2\lceil m/2 \rceil^{h-1}-2}{\lceil m/2 \rceil-1}$ 個節

點，也就是除開始的樹根有 1 個節點，其餘為公比為 $\lceil m/2 \rceil$ ，首項為 2，且共有 $h-1$ 項的等比級數；由於除了樹根至少有 1 個鍵值外，其餘每個節點至少有 $(\lceil m/2 \rceil-1)$ 個鍵值，因此最少共有 $2\lceil m/2 \rceil^{h-1}-1$ 個鍵值。

志光.學儒.保成

高普考 **工頂題庫班** 最強 **3** 階段課程
地方特考

歸納歷屆經典考題，一步一步強化你的實力，就是要你上榜



易錯題型觀念解析

運用全國大數據系統，挑選歷年學生作答時易錯題型，加強觀念解析



強化解題技巧

教你解題關鍵，以題目方式授課，帶你加強應考實力



增加答題速度

讓你在有限的答題時間快速審題、破題，增加取分機會

我是工科人，我工頂啦！

由於考試的題目非常靈活，參加題庫班，除了勤做考古題外，大量實作解說，很快速地強化我的考前記憶，每做一道題目馬上能判斷是在哪一章節，然後再逕行解題。

一年考取 109 普考 電子工程 曾○維



三、請利用 Double Hashing 將下列 key 值放入 hash table of size 13 中（如表 1）：（14 分）
 $\{24, 53, 17, 46, 14, 32, 37, 92\}$
 $h_1(k) = k \bmod 13$ ， $h_2(k) = 1 + (k \bmod 11)$ ，
 $h(k, i) = (h_1(k) + i * h_2(k)) \bmod 13$ ($i = 0, 1, \dots, 12$)

表 1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

《考題難易》：★★★
 《破題關鍵》：Hash 計算題，只要了解 double hash 定義即可計算 hash 值而得解。

【擬答】

$h_1(24) = 24 \bmod 13 = 11$
 $h_1(53) = 53 \bmod 13 = 1$
 $h_1(17) = 17 \bmod 13 = 4$
 $h_1(46) = 46 \bmod 13 = 7$
 $h_1(14) = 14 \bmod 13 = 1$ ，有碰撞，再用 $h(14, 1) = (h_1(14) + 1 * h_2(14)) \bmod 13 = 1 + 1 * 4 = 5$
 $h_1(32) = 32 \bmod 13 = 6$
 $h_1(37) = 37 \bmod 13 = 11$ ，有碰撞，再用 $h(37, 1) = (h_1(37) + 1 * h_2(37)) \bmod 13 = (11 + 1 * 5) \bmod 13 = 3$
 $h_1(92) = 92 \bmod 13 = 1$ ，有碰撞，再用 $h(92, 1) = (h_1(92) + 1 * h_2(92)) \bmod 13 = (1 + 1 * 5) \bmod 13 = 6$ 仍然碰撞，再用 $h(92, 2) = (h_1(92) + 2 * h_2(92)) \bmod 13 = (1 + 2 * 5) \bmod 13 = 2$
 整個 Hash table 如下

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	53	92	37	17	14	32	39				24	

公職王歷屆試題 (109 地方特考)

四、(一)在一棵高度為 $h(h=0,1,2,\dots)$ 的 AVL tree 中：(1)高度為 6 之 AVL tree 最多可能有幾個 nodes？最少可能有幾個 nodes？(假設 root 之 $h=0$) (6 分) (2)假設此樹共有 45 個 nodes。請問此 AVL tree 可能最高之高度及最矮之高度各為何？(6 分)
 (二)請將下列數字{17,60,24,5,7}逐步插入圖 1 的 AVL tree 中，並平衡之。(12 分)

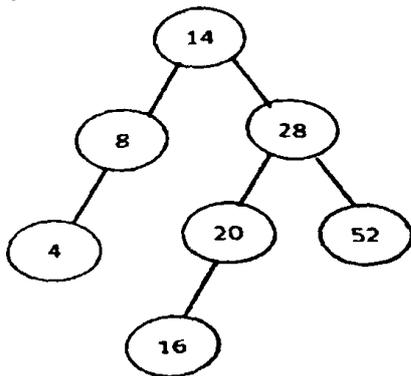


圖 1

《考題難易》：★★★

《破題關鍵》：AVL tree 觀念題，只要掌握 AVL tree 定義即可推導得解。

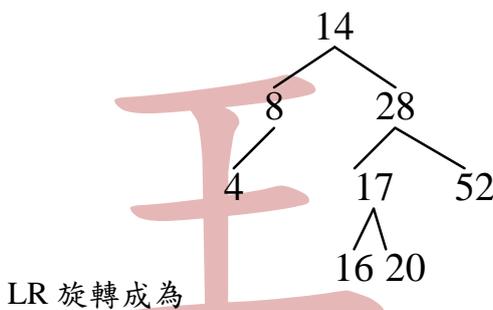
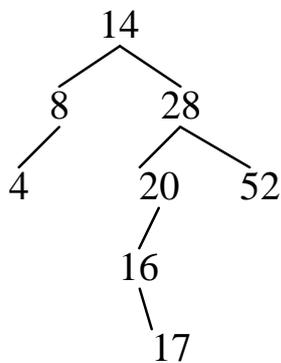
【擬答】

(一)

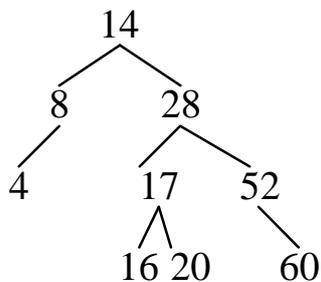
1. 因此若樹根 $h=0$ ，高度為 h 的 AVL 樹，總節點數 N 最多為 $2^{(h+1)}-1=2^7-1=127$ ；最少節點數為 N_h (其中 $N_0=0, N_1=1, N_h= N_{h-1} + N_{h-2} + 1$)，因此 $N_2=2, N_3=4, N_4=7, N_5=12, N_6=20, N_7=33$ 。因此若樹根 $h=0$ ，則 $h=6$ 最少可能有 33 個 nodes
1. 若樹根 $h=0$ ，高度為 5 之 AVL tree 最多可能有 63 個 nodes，高度為 4 之 AVL tree 最多可能有 31 個 nodes，因此若有 45 個 nodes，可能最矮高度為 4；此外由於 $N_6=20, N_7=33, N_8=54$ ，因此若有 45 個 nodes，可能最高高度為 6(若樹根 $h=0$)。

(二)

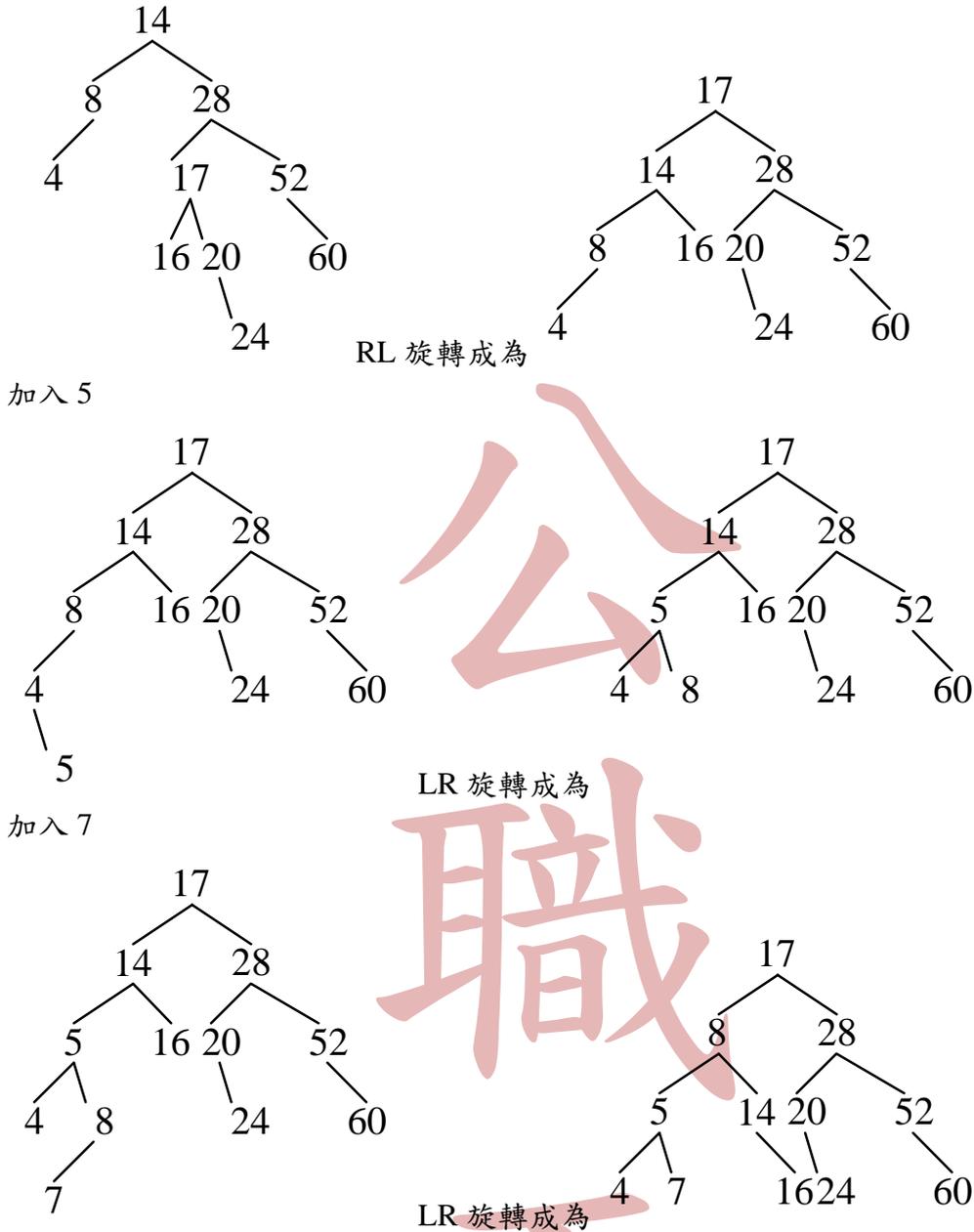
加入 17



加入 60



加入 24



志光.學儒.保成 規劃了豐富完整的課程

精心安排專屬工科人的學習規劃，最完整的上榜課程

工科考試所需要的準備，我們通通幫你安排好了

法科 架構班

學校沒教的，我們教給你！
名師精解法科知識，
結合實務例子，助你建構
法科概念。

扎實 正規班

完整堂數規劃，循序漸進學
習，讓您深度修習工科各專
業學科知識。

作文 實戰班

作文再也不是理工人的痛！
透過專業老師的輔導，快速
強化您的寫作架構、邏輯概
念。

主題 題庫班

主題式教學，搭配各類試題
演練，進行考點分析及破題
要點訓練，讓您短時間各科
實力倍增。

精華 總複習

考前重點總複習，精準掌握
重要考點，讓您考前實力突
飛猛進。

時事議題 修法要點

自己沒時間彙整最新資訊
沒關係！
完整時事補充，修法即時解
析，考前重點全面補遺。

考前提要 關懷講座

名師考前最終提點，穩定你
累積許久的實力，讓你的觀
念更加清晰。

全國全真 模擬考

檢視應考實力、訓練臨場反
應、掌握最新考題趨勢，全
程比照考試時程，模擬考場
實戰氛圍，讓您能以平常心
應考！

公職王歷屆試題 (109 地方特考)

五、請利用堆積排序法 (Heap Sort) 將圖 2 逐步建立或 Min Heap，並將數字從小到大逐一列舉。
(10 分)

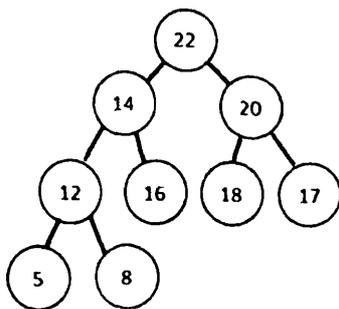


圖 2

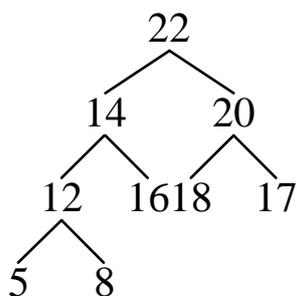
《考題難易》：★★

《破題關鍵》：Heap sort 基本題，只要建立 min heap 即可得解。

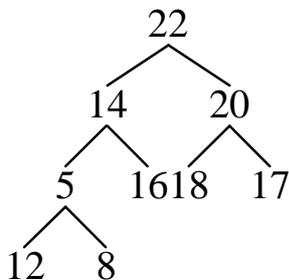
【擬答】

要將數字從小到大逐一列舉應用 max heap，建立 min heap 可得由大到小順序，需要將結果反序得解。

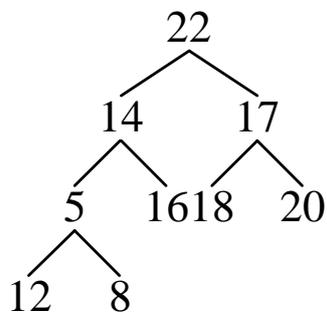
(一)



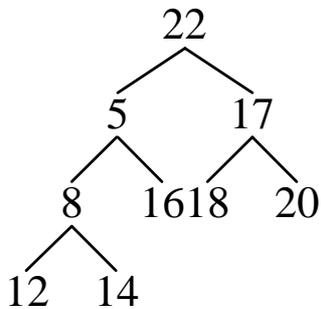
由最後一個內部節點 12 開始重建 min heap



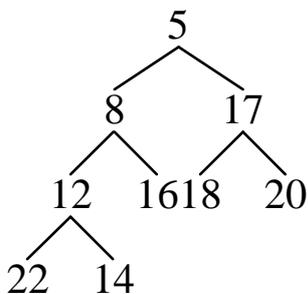
接著重建 20 為樹根的子樹



接著重建 14 為樹根的子樹



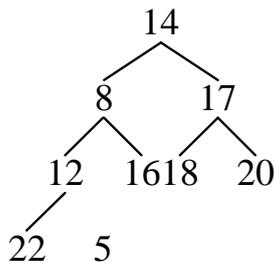
接著重建 22 為樹根的子樹



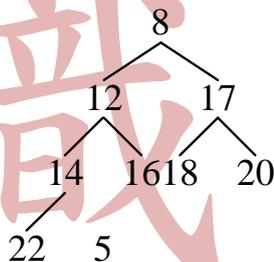
就完成重建 min-heap

(二)

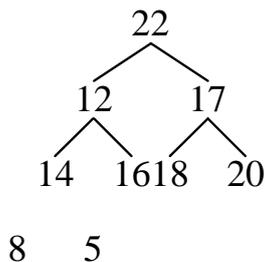
1. 將 min heap 樹根與最後一個節點交換可得



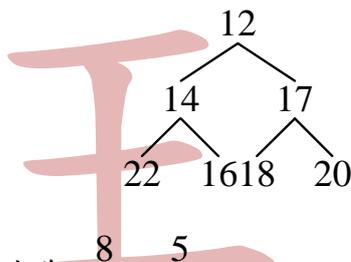
重建堆積成為



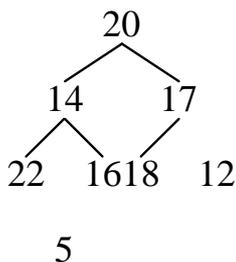
2. 將 min heap 樹根與最後一個節點交換可得



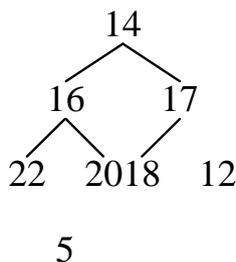
重建堆積成為



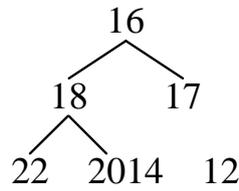
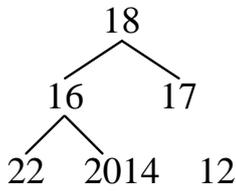
3. 將 min heap 樹根與最後一個節點交換可得



重建堆積成為



4. 將 min heap 樹根與最後一個節點交換可得

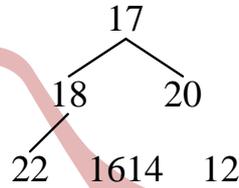
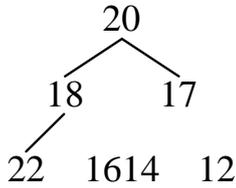


8 5

重建堆積成為

8 5

5. 將 min heap 樹根與最後一個節點交換可得

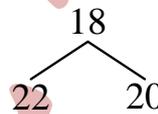
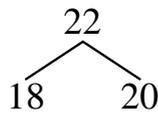


8 5

重建堆積成為

8 5

6. 將 min heap 樹根與最後一個節點交換可得



17 1614 12

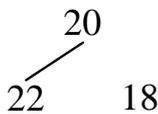
17 1614 12

8 5

重建堆積成為

8 5

7. 將 min heap 樹根與最後一個節點交換可得



17 1614 12

8 5

不必重建堆積

8. 將 min heap 樹根與最後一個節點交換可得

22

20 18

17 1614 12

8 5

僅餘 1 個節點，此時的 array 即為結果，但本題要求將數字從小到大逐一列舉，故需要反序而成為 5,8,12,14,16,17,18,20,22



我們專屬設計的學習模式， 讓你聰明學習輕鬆投考！

我們都在志光.學儒.保成 成功找到工科人的工頂人生

學習模式



直接，有效

- 實際面對面教學，現場解決您的疑惑。
- 優質專業名師，幫您統整、分析考試重點資訊。
- 定期的大小測驗，您可隨時檢視學習效果。



自主，彈性

- 不用煩惱通勤問題，課程教材直接送到家。
- 反覆聽課，不怕觀念聽不懂。
- 完全自由，可自主安排學習進度。



便利，專注

- 安靜舒適的上課環境，提高您的專注力。
- 看課時間能自由預約，無須擔心時間衝突。
- 可依需求暫停、倒轉或快轉，深度學習超簡單。

中年失業報考公職

求職APP裡都是已讀不回，轉個念，重拾課本念書，靠自己努力去爭取一分穩定工作，贏回自己未來的人生；也為了自己的家庭、小孩繼續的打拼下去。

8個月考取 地方特考 四等機械工程 盧○偉



期望大學畢業後即就業

透過老師傾囊相授以及課程安排，很快地便對各考科有一定的程度。並從模擬考中得知是否有不熟、不懂的地方，使我更加針對不足之處加強，一次又一次成績大幅提升使人信心大增！

1年考取/應屆考取 鐵路特考 佐級機械工程 陳○謙



資源豐富幫助我很多

在朋友推薦和試聽後發現也蠻不錯的，且距離家也近，補習班有良好的讀書環境，剛開始我完全不知道該如何準備，就去問補習班的櫃台小姐，他們都很熱心的提供各種方式及管道。

高普雙榜 高普考 電力工程 蔡○霖



- 六、(一)請利用 KMP (Knuth, Morris, Pratt) 演算法寫出失敗函數 (failure function) 之定義。(4分)
- (二)找出 pattern “abcdabcabcdabc” 之失敗函數 (failure function) 值 (請填入表 2 failure value 中)。(14分)
- (三)假設(二)之 pattern 嘗試在 string “abcdabcabcdabcda.....” 找出 pattern。當 pattern 從 index 0 開始比對到 index 13 都一樣，而在 index 14 時發現字母不一樣，請問 pattern 如何利用 failure function 所得之結果很快找到下一個要對應之位置？也就是 pattern 的那一位置的值要位移到 string 的那一對應位置。(4分)

表 2

index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
string	a	b	c	d	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	a	b	c	d	a
pattern	a	b	c	d	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	
failure value	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	

《考題難易》：★★★★

《破題關鍵》：字串比對應用題，參見102地特考古題。

【擬答】

(一)失敗函數 (failure function) f 作用是讓 KMP 演算法無需多次匹配 S 中的任何字串。能夠實現線性時間搜索的關鍵是在主字串的一些欄位中檢查模式字串的初始欄位，我們可以確切地知道在當前位置之前的一個潛在匹配的位置。換句話說，在不錯過任何潛在匹配的情況下，我們“預搜索”這個模式字串本身並將其譯成一個包含所有可能失配的位置對應可以繞過最多無效字串的串列。 $f(j)$ 的求法：

$$f(j) = \text{最大的 } i < j, \text{ 使得 } p_1 p_2 \cdots p_i = p_{j-i+1} p_{j-i+2} \cdots p_j, \text{ 存在有 } i \geq 1;$$

$$f(j) = 0, \text{ 其他情況。}$$

(二)

index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
string	a	b	c	d	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	a	b	c	d	a
failure value	-1	-1	-1	-1	0	1	2	0	1	2	3	4	5	6	-1	0	1	2	

(三) KMP 演算法如下，其中的 $j = \text{failure}[j]$; 就可以加速比對

```
void KMP (string& target, string& pattern) {
    if (pattern.size() > target.size()) return;
    for (int i=0, j=-1; i<target.size(); ++i)
    {
        while (j >= 0 && pattern[j+1] != target[i])
            j = failure[j];
        if (pattern[j+1] == target[i]) j++;
        if (j == pattern.size()-1)
        {
            cout << "PATTERN 出現位置" << i - pattern.size() + 1;
            j = failure[j];
        }
    }
}
```

以本題來說，當 pattern 從 index 0 開始比對到 index 13 都一樣，而在 index 14 時發現字母不一樣，此時 pattern 利用 failure function 所得之結果 6，可以很快跳到 index 為 6 處繼續開始對應。

公
職
王