109 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　別：四等考試
類　科：經建行政、交通技術
科　目：統計學概要
註：Ⅰ. 對應右尾機率值 a 的標準常態分配臨界值 z_a：
$z_{0.05}=1.645$；$z_{0.025}=1.96$；$z_{0.35}=0.385$；$z_{0.55}=-0.126$
Ⅱ. 對應自由度 df 且右尾機率值 a 的 t 分配臨界值 $t_a(df)$：
$t_{0.025}(3)=3.182$；$t_{0.05}(3)=2.353$；$t_{0.025}(4)=2.776$；$t_{0.05}(4)=2.132$；
$t_{0.025}(6)=2.447$；$t_{0.05}(6)=1.943$；$t_{0.025}(7)=2.365$；$t_{0.05}(7)=1.895$；
所有假設檢定問題，皆需正確寫出虛無假設、對立假設、檢定統計量、拒絕域、檢定結果與結論。

一、已知 12 個燈泡中有 5 個瑕疵，任取 4 個來檢驗。
㈠若取後不放回，請計算至少一個有瑕疵之機率。(5 分)
㈡若取後放回，請計算沒有瑕疵之機率。(5 分)
㈢請計算並比較取後放回及不放回，瑕疵個數的變異數有何不同。(10 分)

【解題關鍵】
《考題難易》★
《破題關鍵》二出象觀察成功次數的機率分配，分別考慮取後放回與不放回，即二項分配與超幾何分配，求算機率與變異數為常用機率分配的基本問題。108 年地特四等、106 年原特四等與 105 年高考皆有相同考題。

【擬答】
⑴ X：瑕疵個數
$X \sim HG(N=12, k=5, n=4)$
$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\frac{C_0^5C_4^7}{C_4^{12}}=1-\frac{35}{495}=0.9293$$
⑵ Y：瑕疵個數
$$Y\sim Bin(n=4,\ p=\frac{5}{12})$$
$$P(Y=0)=C_0^4(\frac{5}{12})^0(1-\frac{5}{12})^4=0.1158$$
⑶取後不放回：
$$Var(X)=n\frac{k}{N}(1-\frac{k}{N})\times\frac{N-n}{N-1}=4\times\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}\times\frac{12-4}{12-1}=0.7071$$
取後放回：
$$Var(Y)=np(1-p)=4\times\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}=0.9722$$
兩者的差異在於取後不放回的變異數需額外乘以有限母體校正因子

二、快速檢驗(Rapid Test)經常被用來判斷某人是否有 HIV(造成 AIDS 的病毒)。偽陽性與偽陰性發生的機率分別是 0.03 和 0.08。一位醫師剛收到一份快速檢驗報告，病患檢測的結果呈現陽性。在收到此報告之前，這位醫師將這位病患歸類在低危險群，其為 HIV 帶原的機率只有 0.6%。
㈠這位病患實際有 HIV 的機率為何？(10 分)
㈡假設病患檢查結果是陰性，實際上是陽性的機率為何？(5 分)

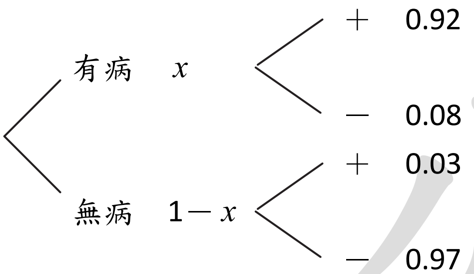
【解題關鍵】

《考題難易》★

《破題關鍵》貝氏定理的應用屬於課內基本題，用在疾病篩檢上雖然過去考試並不常出現，但過去考古題其實比疾病篩檢的應用更為困難。所以本題只需要對偽陽性、偽陰性等名詞定義瞭解，便可迎刃而解。

【擬答】

設實際有HIV機率為x，偽陽性為0.03、偽陰性為0.08，樹狀圖整理如下：



⑴ $P(\text{無病}\mid +)=0.006=\dfrac{x\times 0.92}{x\times 0.92+(1-x)\times 0.03}$

$\Rightarrow x=0.000197$

所以這位患者實際有HIV的機率為0.000197

⑵ $P(\text{有病}\mid -)=\dfrac{0.000197\times 0.08}{0.000197\times 0.08+0.999803\times 0.97}$

$=0.000016$

三、某保險理賠公司接獲申請理賠電話的間隔時間(單位：分鐘)為指數分配：

$$f(x)=\frac{1}{3}e^{-x/3},x\ge 0$$

㈠請問接獲申請理賠電話的平均間隔時間是多少？(5 分)

㈡等待下一通申請理賠電話的時間大於 30 秒的機率為何？(5 分)

㈢請用卜瓦松分配計算 5 分鐘內都沒有來電申請理賠的機率為何？(10 分)

【解題關鍵】

《考題難易》★

《破題關鍵》本題考的是指數分配的基本概念，以及與卜瓦松分配之間的關係，屬課內基本內容。

【擬答】

⑴ $X\sim Exp(\lambda=\frac{1}{3})$

$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=3$，所以平均間隔時間為3分鐘

⑵ $P(X>0.5)=\int_{0.5}^{\infty}\frac{1}{3}e^{-x/3}dx=-e^{-x/3}\Big|_{0.5}^{\infty}=e^{-0.5/3}=0.8465$

⑶平均間隔時間為3分鐘，代表平均每分鐘內有 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 次理賠，

所以每5分鐘內有 $\lambda=\dfrac{5}{3}$ 次理賠

$X\sim Poi(\lambda=\frac{5}{3})$

$$f(x)=\frac{(\frac{5}{3})^x e^{-\frac{5}{3}}}{x!},\ x=0,1,2,\ldots,\infty$$

$$P(X=0)=\frac{(\frac{5}{3})^0 e^{-\frac{5}{3}}}{0!}=e^{-\frac{5}{3}}=0.1889$$

四、治療師想了解，聽音樂是否能讓患有憂鬱症的病患降低其憂鬱指數，於是抽選了 7 位病患，分別測他們聽音樂前及聽音樂後的憂鬱指數，資料如下：

病患	1	2	3	4	5	6	7
聽音樂前	52	56	52	41	45	50	49
聽音樂後	47	51	45	38	43	46	42

㈠請問病患聽音樂前後的平均憂鬱指數差異（後-前）約為何？（5 分）

㈡在 0.05 的顯著水準，利用臨界值法檢定是否聽音樂後會降低憂鬱指數？（15 分）

【解題關鍵】

《考題難易》★

《破題關鍵》相依樣本 t 檢定為課內基本內容。108 年地特三等、104 地特三等與 104 年地特皆有相同考題可參考。

【擬答】

⑴設聽音樂前憂鬱指數為 X_i，聽音樂後憂鬱指數為 Y_i

聽音樂前後差異為 $d_i=X_i-Y_i=5, 5, 7, 3, 2, 4, 7$

得聽音樂前後的平均憂鬱指數差異為 $\bar{d}=\frac{\sum d_i}{n}=4.7143$

⑵ $s_d=\sqrt{\frac{\sum(d_i-\bar{d})^2}{n-1}}=1.8898$

$H_0:\mu_d\le 0\quad H_1:\mu_d>0$

$\alpha=0.05$

$$T^*=\frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}=\frac{4.7143}{1.8898/\sqrt{7}}=6.6\in C$$

$C:\{T^*>t_{0.05}(6)=1.943\}$

拒絕 H_0，有顯著的證據說聽音樂後會降低憂鬱指數

五、2017年某款750ml紅酒的拍賣價格及酒齡資料如下表：

酒齡（年）	36	20	29	30	34
價格（$）	245	142	212	209	237

㈠試用最小平方估計法（least squares estimation）建立一估計迴歸方程式，來描述酒齡對拍賣價格的影響。（10分）

㈡在0.05的顯著水準下檢定此迴歸線是否顯著。（10分）

㈢使用此估計迴歸方程式預測25年酒齡的紅酒其拍賣價格。（5分）

【解題關鍵】

《考題難易》★

《破題關鍵》簡單線性迴歸的方程式估計、假設檢定與預測值皆為課內基本內容。

【擬答】

⑴酒齡為自變項 X，而價格為應變項 Y

經計算得 $\sum X^2 = 4593, \sum X = 149,$

$\sum Y^2 = 224983, \sum Y = 1045, \sum XY = 32136$

$$SS_X = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n} = 4593 - \frac{149^2}{5} = 152.8$$

$$SS_Y = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n} = 224983 - \frac{1045^2}{5} = 6578$$

$$SS_{XY} = \sum XY - \frac{(\sum X)(\sum Y)}{n} = 32136 - \frac{149 \times 1045}{5} = 995$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = \frac{995}{152.8} = 6.51178$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = \frac{1045}{5} - 6.51178 \times \frac{149}{5} = 14.94895$$

迴歸方程式為 $\hat{Y} = 14.94895 + 6.51178X$

⑵ $SSR = \hat{\beta}_1^2 \cdot SS_X = 6.51178^2 \times 152.8 = 6479.221$

$SSTO = SS_Y = 6578$

$SSE = SSTO - SSR = 6578 - 6479.221 = 98.779$

$H_0 : \beta_1 = 0 \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$

$\alpha = 0.05$

$$T^* = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\frac{MSE}{SS_x}}} = \frac{6.51178}{\sqrt{\frac{98.779/4}{152.8}}} = 16.198 \notin C$$

$C : \{|T^*| > t_{0.025}(3) = 3.182\}$

拒絕 H_0，有顯著證據迴歸線顯著

⑶ $X = 25$，$\hat{Y} = 14.94895 + 6.51178 \times 25 = 177.74345$