

109 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試

類 科：測量製圖

科 目：測量平差法

一、觀測一平面三角形的三個內角 l_1 、 l_2 及 l_3 ，觀測量等權不相關。若選擇兩個內角 l_1 、 l_2 為未知參數 X_1 、 X_2 ，試以間接觀測平差證明改正數 $v_1=v_2=v_3=\frac{1}{3}(180^\circ-l_1-l_2-l_3)$ ？若選擇三個內角 l_1 、 l_2 及 l_3 為未知參數 X_1 、 X_2 、 X_3 ，試列出其觀測方程式並寫出此種平差模型之名稱。(25 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★：普通

2. 《解題關鍵》關鍵字：等權間接觀測平差、條件平差。重點提要：觀測方程式。

【擬答】

(一)以間接觀測平差證明：改正數 $v_1=v_2=v_3=\frac{1}{3}(180^\circ-l_1-l_2-l_3)$

觀測量： l_1 、 l_2 及 l_3 ，觀測數 $n=3$

未知量 $\angle CAB = \theta_1$ ， $\angle ABC = \theta_2$ ，未知數=2，自由度=1

假設： $\theta_1 = l_1 + x_1$ ， $\theta_2 = l_2 + x_2$

$$\text{觀測方程式} \begin{cases} l_1 + v_1 = \theta_1 \\ l_2 + v_2 = \theta_2 \\ l_3 + v_3 = 180^\circ - \theta_1 - \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \theta_1 - l_1 = x_1 \\ v_2 = \theta_2 - l_2 = x_2 \\ v_3 = 180^\circ - l_1 - l_2 - l_3 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

矩陣式： $V = AX - L$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + l_2 + l_3 - 180^\circ \end{bmatrix}$$

$$N = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = A^T L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + l_2 + l_3 - 180^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180^\circ - l_1 - l_2 - l_3 \\ 180^\circ - l_1 - l_2 - l_3 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \times \text{adj} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = N^{-1}U = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) \\ 180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) \\ 180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x_1 = x_2 = \frac{1}{3}[180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)],$$

$$v_1 = x_1 = \frac{1}{3}[180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)], \quad v_2 = x_2 = \frac{1}{3}[180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)],$$

$$v_3 = 180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) - x_1 - x_2$$

$$v_3 = 180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) - \frac{1}{3}[180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)] - \frac{1}{3}[180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)] = \frac{1}{3}[180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)]$$

$$v_3 = \frac{1}{3}[180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)], \quad v_1 = \frac{1}{3}[180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)], \quad v_2 = \frac{1}{3}[180^\circ - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)]$$

$$\therefore v_1 = v_2 = v_3 = \frac{1}{3}(180^\circ - \ell_1 - \ell_2 - \ell_3) \quad \text{得證}$$

(二)若選擇三個內角 ℓ_1 、 ℓ_2 及 ℓ_3 為未知參數 x_1 、 x_2 、 x_3

三個內角觀測量均為未知參數，以條件平差法求解。

1. 觀測方程式

觀測數 $n=3$ ，必要觀測數=2，條件數 $r=3-2=1$

$$(\ell_1 + v_1) + (\ell_2 + v_2) + (\ell_3 + v_3) - 180^\circ = 0, \quad v_1 + v_2 + v_3 + (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - 180^\circ) = 0$$

矩陣式： $BV + W = 0$ ，

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T, \quad W = \begin{bmatrix} \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - 180^\circ \end{bmatrix}$$

2. 此種平差模型為條件平差模型

【命中特區】書名：測量平差法

作者：賴明 章節出處：第五章間接觀測平差之二、等權間接觀測平差

志光.學儒.保成

專屬工科人的工頂人生

我們都上榜了!

連過三榜 雙料金榜 眾多連續上榜，再創工科巔峰！地方特考、台電職員蓄勢待發

李○庭 109年鐵路員級機械工程【全國探花】	楊○仲 109年鐵路特考電子工程【全國榜眼】	柯○智 109年高考資訊處理	林○瑞 109年普考電力工程
109年高考機械工程	109年普考電子工程	109年普考資訊處理	109年鐵路特考電力工程
連過三榜 109年普考機械工程	蔡○全 109年鐵路特考機械工程【全國第四】	彭○琳 109年高考資訊處理	鄭○威 109年普考機械工程
	109年普考機械工程	109年普考資訊處理	109年鐵路特考機械工程
陳○憲 109年鐵路特考電子工程【全國榜眼】	張○鈺 109年普考電力工程【全國第五】	李○ 109年普考資訊處理	蘇○宏 109年普考電子工程
109年高考電子工程	109年高考電力工程	109年鐵路特考資訊處理	109年鐵路特考電子工程

激賞 109年工科上榜菁英齊聚

高考 資訊處理 許○ 高考 資訊處理 范○毅 高考 資訊處理 李○邱豪 高考 資訊處理 徐○慎遠 高考 資訊處理 張○聿賢 普考 資訊處理 郭○豐 普考 資訊處理 李○修 普考 資訊處理 陳○宇 普考 資訊處理 楊○婷 普考 資訊處理 陳○夫 普考 資訊處理 周○ 普考 資訊處理 黃○慈 普考 資訊處理 劉○如 普考 資訊處理 賴○程 普考 資訊處理 林○靜 普考 資訊處理 趙○宏 高考 電力工程 蔡○安	高考 電力工程 江○廷 高考 電力工程 馮○嘉 高考 電力工程 陳○宇 高考 電力工程 薛○辰 高考 電力工程 黃○喻 普考 電力工程 孫○德 普考 電力工程 吳○翰 普考 電力工程 黃○德 高考 電子工程 何○霖 高考 電子工程 許○瑜 高考 電子工程 朱○竹 普考 電子工程 洪○銓 普考 電子工程 張○維 普考 電子工程 吳○泓 普考 電子工程 王○宏 普考 電子工程 曾○維 高考 機械工程 古○芳 高考 機械工程 張○誠	普考 機械工程 范○澤 普考 機械工程 常○倫 普考 機械工程 林○彬 普考 機械工程 陳○雄 普考 機械工程 陳○修 普考 化學工程 謝○洋 鐵路特考員級 電力工程 李○諺 鐵路特考員級 電力工程 劉○傑 鐵路特考員級 電力工程 陳○義 鐵路特考員級 電力工程 林○翔 鐵路特考員級 電力工程 顏○恆 鐵路特考員級 電力工程 簡○琪 鐵路特考員級 電力工程 蘇○正 鐵路特考員級 電力工程 謝○詳 鐵路特考員級 電力工程 蔡○ 鐵路特考員級 電力工程 陳○錡 鐵路特考員級 電力工程 許○如	鐵路特考佐級 養路工程 邱○富 鐵路特考佐級 養路工程 薄○軒 鐵路特考佐級 養路工程 陳○同 鐵路特考佐級 養路工程 林○鈞 鐵路特考佐級 電子工程 周○傑 鐵路特考佐級 電子工程 郭○維 鐵路特考佐級 電子工程 廖○翔 鐵路特考佐級 電子工程 王○洋 鐵路特考佐級 電子工程 鍾○承 鐵路特考佐級 電子工程 陳○儒 鐵路特考佐級 電子工程 蔡○穎 鐵路特考佐級 機械工程 李○億 鐵路特考佐級 機械工程 林○潤 鐵路特考佐級 機械工程 張○祺 鐵路特考佐級 機械工程 蘇○雅 鐵路特考佐級 機械工程 石○玄 鐵路特考佐級 機械工程 陳○民	鐵路特考佐級 機檢工程 賴○威 鐵路特考佐級 機檢工程 徐○成 台電僱員 電鍍技術類 曾○綱 台電僱員 保健物理類 黃○妹 台電僱員 變電設備維護類 林○佑 台電僱員 機械運轉維護類 趙○瑄 台電僱員 機械運轉維護類 甯○軒 台電僱員 配電線路維護類 范○璋 台電僱員 配電線路維護類 陳○佑 台電僱員 配電線路維護類 黃○枉 台電僱員 配電線路維護類 何○緯 台電僱員 配電線路維護類 林○豪 台電僱員 配電線路維護類 李○榮 台電僱員 配電線路維護類 蔡○晴 台電僱員 配電線路維護類 楊○凱 台電僱員 配電線路維護類 戴○霖 台電僱員 配電線路維護類 張○哲
--	--	--	---	--

版面有限，僅向未刊登者致歉

二、已知三個隨機變數 X、Y、Z 的變方-協變方矩陣如下式，試求隨機變數 X、Y、Z 的中誤差 (σ_X 、 σ_Y 、 σ_Z) 與 X、Y、Z 的相關係數矩陣。(25 分)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 0.75 \\ 1.5 & 4 & -3 \\ 0.75 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★：簡單
 2. 《解題關鍵》關鍵字：變方-協變方矩陣的定義。
- 重點提要：相關係數的計算公式，相關係數矩陣的定義

【擬答】

(一)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 0.75 \\ 1.5 & 4 & -3 \\ 0.75 & -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_Z^2 \end{bmatrix}$$

∴ 變方： $\sigma_X^2 = 1$ ， $\sigma_Y^2 = 4$ ， $\sigma_Z^2 = 9$ ； $\sigma_X = \pm 1$ ， $\sigma_Y = \pm 2$ ， $\sigma_Z = \pm 3$

協變方： $\sigma_{XY} = \sigma_{YX} = 1.5$ ， $\sigma_{XZ} = \sigma_{ZX} = 0.75$ ， $\sigma_{YZ} = \sigma_{ZY} = -3$

相關係數： $\rho_{XX} = \rho_{YY} = \rho_{ZZ} = 1$

$$\rho_{XY} = \rho_{YX} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2}} = \frac{1.5}{\sqrt{1 \times 4}} = \frac{1.5}{2} = 0.75$$

$$\rho_{XZ} = \rho_{ZX} = \frac{\sigma_{XZ}}{\sqrt{\sigma_X^2 \cdot \sigma_Z^2}} = \frac{0.75}{\sqrt{1 \times 9}} = \frac{0.75}{3} = 0.25$$

$$\rho_{YZ} = \rho_{ZY} = \frac{\sigma_{YZ}}{\sqrt{\sigma_Y^2 \cdot \sigma_Z^2}} = \frac{-3}{\sqrt{4 \times 9}} = \frac{-3}{6} = -0.5$$

∴ 隨機變數 X、Y、Z 的中誤差 $(\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z) = (\pm 1, \pm 2, \pm 3)$

$$\therefore X、Y、Z \text{ 的相關係數矩陣：} \begin{bmatrix} \rho_{XX} & \rho_{XY} & \rho_{XZ} \\ \rho_{YX} & \rho_{YY} & \rho_{YZ} \\ \rho_{ZX} & \rho_{ZY} & \rho_{ZZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 1 & -0.5 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

三、某測量公司為提升人員工作效率及成果品質，開設進階電腦操作與軟體教學課程，往年講解操作授課時間較長，受訓人員完成訓練時間近似常態分布。現公司設計一套人工智慧的教學課程，預期可縮短訓練時間並達到一樣的效果。公司隨機抽取 16 人接受此課程訓練，平均訓練天數為 30 天，標準差為 4.4 天。試問在 95% 信心水準 (confidence level) 之下，利用人工智慧的教學課程平均天數的信心區間 (confidence interval) 為何？若希望「估計誤差有 95% 的機率小於或等於 2 天」，試問要達到此目標至少應抽取多少樣本？($t_{16,0.05}=1.746$ 、 $t_{15,0.05}=1.753$ 、 $t_{16,0.025}=2.120$ 、 $t_{15,0.025}=2.131$ 、 $Z_{0.025}=1.96$ 、 $Z_{0.05}=1.645$)。(25 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★：普通
2. 《解題關鍵》關鍵字：誤差分布的統計。重點提要：信心區間。

【擬答】

(一) 計算該距離的 95% 信心區間

$$S_1 = 30 \text{ 天}, \sigma_1 = 4.4 \text{ 天}, n_1 = 16 \text{ 人。}$$

因為是從母體隨機抽取，使用 t 分佈，其臨界值 $t_{15,0.025} = 2.131$ 。

$$\begin{aligned} 95\% \text{ 信心區間：} & \left[S_1 - t_{15,0.025} \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}, S_1 + t_{15,0.025} \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} \right] \\ & = \left[30 - 2.131 \times \frac{4.4}{\sqrt{16}}, 30 + 2.131 \times \frac{4.4}{\sqrt{16}} \right] = [27.7 \text{ 天}, 32.3 \text{ 天}] \end{aligned}$$

(二) 計算要達到此目標 (估計誤差有 95% 的機率小於或等於 2 天) 至少應抽取的樣本數 n

$$t_{15,0.025} \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \leq 2, \frac{t_{15,0.025} \times \sigma_1}{2} \leq \sqrt{n}, n \geq \left(\frac{t_{15,0.025} \times \sigma_1}{2} \right)^2 = \left(\frac{2.131 \times 4.4}{2} \right)^2 = 22 \text{ 人}$$

∴ 至少應抽取的樣本數 = 22 人

志光.學儒.保成 規劃了豐富完整的課程

精心安排專屬**工科人**的學習規劃，最完整的上榜課程

工科考試所需要的準備，我們通通幫你安排好了



- 法科架構班**：學校沒教的，我們教給你！名師精解法科知識，結合實務例子，助你建構法科概念。
- 扎實正規班**：完整堂數規劃，循序漸進學習，讓您深度修習工科各專業學科知識。
- 作文實戰班**：作文再也不是理工人的痛！透過專業老師的輔導，快速強化您的寫作架構、邏輯概念。
- 主題題庫班**：主題式教學，搭配各類試題演練，進行考點分析及破題要點訓練，讓您短時間各科實力倍增。
- 精華總複習**：考前重點總複習，精準掌握重要考點，讓您考前實力突飛猛進。
- 時事議題修法要點**：自己沒時間彙整最新資訊沒關係！完整時事補充，修法即時解析，考前重點全面補遺。
- 考前提要關懷講座**：名師考前最終提點，穩定你累積許久的實力，讓你的觀念更加清晰。
- 全國全真模擬考**：檢視應考實力、訓練臨場反應、掌握最新考題趨勢，全程比照考試時程，模擬考場實戰氛圍，讓您能以平常心應考！

四、三角形 ABC 中， $\angle A$ 與 $\angle B$ 已觀測，權分別為 $P_A=2$ 、 $P_B=1$ ，試問 $\angle C$ 的權 P_C 為多少？若角 A 中誤差 $\sigma_A=\sqrt{8}''$ ，試求角 B 中誤差 σ_B 。(25 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★：普通
2. 《解題關鍵》關鍵字：誤差傳播定律。重點提要：權與中誤差平方成反比。

【擬答】

(一) 計算角 B 中誤差 σ_B

已知：角 A 中誤差 $\sigma_A=\sqrt{8}''$ ，且 $P_A=2$ 、 $P_B=1$ ∴ 權與中誤差平方成反比

$$P_A : P_B = \frac{1}{\sigma_A^2} : \frac{1}{\sigma_B^2}, 2 : 1 = \frac{1}{(\sqrt{8})^2} : \frac{1}{\sigma_B^2} = \frac{1}{8} : \frac{1}{\sigma_B^2}, 1 \times \frac{1}{8} = 2 \times \frac{1}{\sigma_B^2}, \frac{1}{8} = \frac{2}{\sigma_B^2}$$

$$\sigma_B^2 = 16, \sigma_B = \pm 4''$$

(二) 計算 $\angle C$ 的權 P_C

$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$ ，由誤差傳播定律，得知

$$\sigma_{\angle C}^2 = \sigma_{\angle A}^2 + \sigma_{\angle B}^2 = (\sqrt{8})^2 + 4^2 = 8 + 16 = 24,$$

公職王歷屆試題 (109 地方特考)

$$P_A : P_C = \frac{1}{\sigma_{ZA}^2} : \frac{1}{\sigma_{ZC}^2} = \frac{1}{8} : \frac{1}{24} = 3:1, 2:P_C = 3:1, 3P_C = 2, P_C = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sigma_B = \pm 4, P_C = \frac{2}{3}$$

【命中特區】書名：測量平差法

作者：賴明 章節出處：第二章二、誤差傳播定律之應用

志光.學儒.保成

公職工科+國營事業

1+1 更有力

準備公職的同時，可報考國營事業考試，善用重疊考科，一次準備就上榜！

110年上榜路徑大公開！一起準備最聰明，一年超過8次上榜機會，等你工頂！

初等考 1月 ● 最容易上手的公職考試	關務特考 4月 ● 考科少於同職等考試	鐵路特考 6月 ● 佐級錄取率最高	高普考 7月 ● 一次準備，四次上榜機會	調查局特考 8月 ● 三等月薪76,000起
地方特考 12月 ● 考科同高普考	自來水評價人員 不定期舉辦 ● 只考選擇題	台電考試 不定期舉辦 ● 考科少、好準備 ● 110年預計5月考試	中油僱員 不定期舉辦 ● 只考2科，多為選擇題	國營事業職員級 不定期舉辦 ● 國營退休潮，缺額多，限工科報考競爭者少

錄取率高

109年
 工科錄取率
 最高達**19.42%**

電力工程	電子工程	機械工程	資訊工程
高考 19.42%	高考 9.04%	高考 18.27%	高考 12.92%
普考 17.33%	普考 9.39%	普考 13.70%	普考 10.47%

五