

109 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：四等考試

類 科：測量製圖

科 目：測量平差法概要

一、設三個獨立隨機變數 A、B 和 C，中誤差為 $\sigma_A = \sqrt{2}\sigma$ ， $\sigma_B = \sigma_C = \sigma$ ，今得新的隨機變數 $X = A + B + C$ ，試以誤差傳播定律求隨機變數 X 的中誤差 σ_X 。(25 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★：簡單

2. 《解題關鍵》關鍵字：誤差傳播定律。重點提要：和數定律。

【擬答】

(-) 已知： $\sigma_A = \sqrt{2}\sigma$ ， $\sigma_B = \sigma_C = \sigma$

$$X = A + B + C, \quad \frac{\partial X}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A}(A + B + C) = \frac{\partial}{\partial A}A = 1, \quad \text{同理}, \quad \frac{\partial X}{\partial B} = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial C} = 1$$

$$\sigma_X = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)^2 \times \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial B}\right)^2 \times \sigma_B^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial C}\right)^2 \times \sigma_C^2}, \quad \frac{\partial X}{\partial A} = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial B} = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial C} = 1 \quad \text{代入}$$

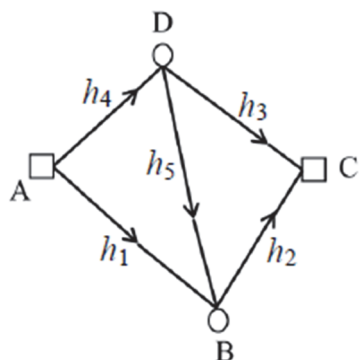
$$\sigma_X = \pm \sqrt{1 \times \sigma_A^2 + 1 \times \sigma_B^2 + 1 \times \sigma_C^2} = \pm \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2} = \pm \sqrt{2\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2} = \pm 2\sigma$$

$\therefore$ 隨機變數 X 的中誤差 $\sigma_X = \pm 2\sigma$

【命中特區】書名：測量平差法

作者：賴明 章節出處：第二章誤差傳播定律及其應用之二、誤差傳播定律之應用

二、如圖之水準網中(箭頭為觀測方向)，水準點 A、C 為已知水準點($H_A = 5.000$ m、 $H_C = 6.000$ m)，B、D 為未知點，水準觀測數據如下表所示：



高程差觀測值(m)	水準路線長(km)
$H_1 = 0.500$ m	2
$H_2 = 0.400$ m	5
$H_3 = 0.600$ m	5
$H_4 = 0.300$ m	2
$H_5 = 0.200$ m	5

試列出間接平差觀測方程式、設計矩陣 A、權矩陣 P 及法矩陣 N (無需求解)。若採用條件平差進行解算，試問會有幾個條件式？。(25 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★★：非常困難

2. 《解題關鍵》關鍵字：間接平差、條件平差。重點提要：水準網。

【擬答】

(一)列出間接平差觀測方程式、設計矩陣 A 、權矩陣 P 及法矩陣 N

已知：水準路線長 S_i 。 $H_A=5.000\text{ m}$ ， $H_C=6.000\text{ m}$ 。未知量： H_B ， H_D

觀測數 $n=5$ ，未知數 $u=2$ ，自由度 $r=n-u=5-2=3$ 。

設： H_B 之初值 $H_{B_0} = H_A + h_1 = 5.000 + 0.500 = 5.500\text{ m}$

H_D 之初值 $H_{D_0} = H_C - h_3 = 6.000 - 0.600 = 5.400\text{ m}$

∴ 假設： $H_B = 5.500 + x_1$ ， $H_D = 5.400 + x_2$

1. 權 $P \propto \frac{1}{S}$ ， $P_1:P_2:P_3:P_4:P_5 = \frac{1}{S_1}:\frac{1}{S_2}:\frac{1}{S_3}:\frac{1}{S_4}:\frac{1}{S_5}$

$$P_1:P_2:P_3:P_4:P_5 = \frac{1}{2}:\frac{1}{5}:\frac{1}{5}:\frac{1}{2}:\frac{1}{5} = 5:2:2:5:2$$

$$2. \text{觀測方程式} \begin{cases} h_1 + v_1 = H_B - H_A \\ h_2 + v_2 = H_C - H_B \\ h_3 + v_3 = H_C - H_D \\ h_4 + v_4 = H_D - H_A \\ h_5 + v_5 = H_B - H_D \end{cases}$$

3. 改正數方程式

$$\begin{cases} v_1 = H_B - H_A - h_1 \\ v_2 = H_C - H_B - h_2 \\ v_3 = H_C - H_D - h_3 \\ v_4 = H_D - H_A - h_4 \\ v_5 = H_B - H_D - h_5 \end{cases}, \begin{cases} v_1 = 5.500 + x_1 - 5.000 - 0.500 = x_1 \\ v_2 = 6.000 - 5.500 - x_1 - 0.400 = -x_1 + 0.100 \\ v_3 = 6.000 - 5.400 - x_2 - 0.600 = -x_2 \\ v_4 = 5.400 + x_2 - 5.000 - 0.300 = x_2 + 0.100 \\ v_5 = 5.500 + x_1 - 5.400 - x_2 - 0.200 = x_1 - x_2 - 0.100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = x_1 \\ v_2 = -x_1 + 0.100 \\ v_3 = -x_2 \\ v_4 = x_2 + 0.100 \\ v_5 = x_1 - x_2 - 0.100 \end{cases}, \text{如單位為 } mm, \text{ 則} \begin{cases} v_1 = x_1 \\ v_2 = -x_1 + 100 \\ v_3 = -x_2 \\ v_4 = x_2 + 100 \\ v_5 = x_1 - x_2 - 100 \end{cases}$$

4. 以矩陣式表示： $V = AX - L$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \\ -100 \\ 100 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. 組法方程式： $NX = U$ ， $N = A^T P A$ ， $U = A^T P L$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \\ -100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ -700 \end{bmatrix}$$

6. 計算反函數，得最佳估值 $X = N^{-1}U$

$$N^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}} \times \text{adj} \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{77} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$X = N^{-1}U = \frac{1}{77} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 400 \\ -700 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28.6 \\ -71.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

7. 計算 B 和 D 點高程

$$H_B = 5.500 + x_1 = 5.500m + 28.6mm = 5.5286m$$

$$H_D = 5.400 + x_2 = 5.400m - 71.4mm = 5.3286m$$

(二)若採用條件平差進行解算，條件式數目分析

1. 條件方程式：條件式有 2 個

$$\begin{cases} (h_5 + v_5) + (h_2 + v_2) - (h_3 + v_3) = 0 \\ (h_4 + v_4) + (h_5 + v_5) - (h_1 + v_1) = 0 \end{cases}, \begin{cases} v_2 + v_5 - v_3 + (h_2 + h_5 - h_3) = 0 \\ v_4 + v_5 - v_1 + (h_4 + h_5 - h_1) = 0 \end{cases}$$

【命中特區】書名：測量平差法之第五章間接觀測平差之考題 5-28

作者：賴明 章節出處：第五章 間接觀測平差之三、加權（非等權）間接觀測平差

三、偶然誤差係起因於人類感官、儀器極限或受自然環境因素所引起，且誤差無法立即發現或改善，每個觀測值必伴隨著偶然誤差，而其大小、符號和統計機率有關。試列出四項偶然誤差之特性。(25 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★：普通

2. 《解題關鍵》關鍵字：偶然誤差之特性。重點提要：以機率理論說明。

【擬答】

(一)偶然誤差之基本特性

1. 誤差有正有負。相同大小的正、負誤差，出現之機率相等。
2. 較小之誤差出現機率，較大誤差出現之機率為高。
3. 甚大誤差不易出現。

4. 具常態分布曲線的特性。

(二) 以機率理論說明偶然誤差之特性

1. 在一定的觀測條件下（觀測量不含粗差與系統誤差），誤差的絕對值有一定的限值；超出一定限值的誤差，其出現的機率為零。（有界性）

2. 絕對值較小的誤差，比絕對值較大的誤差，出現的機率為大。（單峰）

3. 絕對值相同的正負誤差，出現的機率相同。（對稱）

4. 偶然誤差的數學期望值=0；偶然誤差的理論平均值為零。（補償性）

ie., 偶然誤差(Δ)的算術平均值，隨著觀測次數無限增加，趨近於 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0$$

5. 偶然誤差的平均值、中位數(*median*)、眾數(*mode*)之數值，均相同。

6. 任何分布的極限分布，均會形成常態分布。（依據中央極限定理）

7. 單峰且對稱（對稱於平均數 μ ）

【命中特區】書名：測量平差法

作者：賴明 章節出處：第一章第 2 節四、測量誤差的分類及其處理方法

志光.學儒.保成 規劃了豐富完整的課程

精心安排專屬**工科人**的學習規劃，最完整的上榜課程

工科考試所需要的準備，我們通通幫你安排好了

法科
架構班

學校沒教的，我們教給你！
名師精解法科知識，
結合實務例子，助你建構
法科概念。

扎實
正規班

完整堂數規劃，循序漸進學
習，讓您深度修習工科各專
業學科知識。

作文
實戰班

作文再也不是理工人的痛！
透過專業老師的輔導，快速
強化您的寫作架構、邏輯概
念。

主題
題庫班

主題式教學，搭配各類試題
演練，進行考點分析及破題
要點訓練，讓您短時間各科
實力倍增。

精華
總複習

考前重點總複習，精準掌握
重要考點，讓您考前實力突
飛猛進。

時事議題
修法要點

自己沒時間彙整最新資訊
沒關係！
完整時事補充，修法即時解
析，考前重點全面補遺。

考前提要
關懷講座

名師考前最終提點，穩定你
累積許久的實力，讓你的觀
念更加清晰。

全國全真
模擬考

檢視應考實力、訓練臨場反
應、掌握最新考題趨勢，全
程比照考試時程，模擬考場
實戰氛圍，讓您能以平常心
應考！

四、今以三種測距儀器 A、B 與 C，分別觀測一距離 3 次、3 次與 4 次，得平均值 $\bar{A}=50.15\text{m}$ 、 $\bar{B}=50.13\text{m}$ 及 $\bar{C}=49.99\text{m}$ ，儀器觀測精度分別為 $\sigma_A=2\text{cm}$ 、 $\sigma_B=3\text{cm}$ 與 $\sigma_C=2\text{cm}$ ，試求該段距離之平均值(m)與中誤差(cm)。(25 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★：困難

2. 《解題關鍵》關鍵字：誤差傳播定律。重點提要：應用公式 $\sigma_N = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}$ 。

【擬答】

(一) 假設：距離為 L 。以三種測距儀器 A 、 B 與 C ，觀測距離，得 L_1 ， L_2 ， L_3 亦即； $\bar{A} = L_1 = 50.15m$ 、 $\bar{B} = L_2 = 50.13m$ 及 $\bar{C} = L_3 = 49.99m$ 1. 以測距儀器 A ，觀測距離 3 次，得中誤差 $\sigma_1 = \sigma_{L_1} = \frac{\sigma_A}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} cm$ 以測距儀器 B ，觀測距離 3 次，得中誤差 $\sigma_2 = \sigma_{L_2} = \frac{\sigma_B}{\sqrt{3}} = \pm \frac{3}{\sqrt{3}} = \pm \sqrt{3} cm$ 以測距儀器 C ，觀測距離 4 次，得中誤差 $\sigma_3 = \sigma_{L_3} = \frac{\sigma_C}{\sqrt{4}} = \pm \frac{2}{\sqrt{4}} = \pm 1 cm$ 2. 權：權 P 與中誤差 σ 平方成反比 $P \propto \frac{1}{\sigma^2}$

$$P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \frac{1}{\sigma_3^2} = \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2} : \frac{1}{(\sqrt{3})^2} : \frac{1}{1^2} = \frac{3}{4} : \frac{1}{3} : 1 = 9 : 4 : 12$$

權之和 $[P] = P_1 + P_2 + P_3 = 9 + 4 + 12 = 25$ 3. 計算該段距離之平均值 $\bar{L}$

$$[PL] = P_1 L_1 + P_2 L_2 + P_3 L_3 = 9 \times 50.15 + 4 \times 50.13 + 12 \times 49.99 = 1251.75$$

$$\bar{L} = \frac{[PL]}{[P]} = \frac{1251.75}{25} = 50.07m$$

平均值

4. 計算該段距離之中誤差 $\sigma_{\bar{L}}$

$$\therefore \bar{L} = \frac{[PL]}{[P]} = \frac{1}{[P]} \cdot (P_1 L_1 + P_2 L_2 + P_3 L_3)$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial L_1} = \frac{1}{[P]} \cdot \frac{\partial}{\partial L_1} (P_1 L_1 + P_2 L_2 + P_3 L_3) = \frac{P_1}{[P]}, \text{同理}, \frac{\partial \bar{L}}{\partial L_2} = \frac{P_2}{[P]}, \frac{\partial \bar{L}}{\partial L_3} = \frac{P_3}{[P]}$$

$$\sigma_{\bar{L}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial L_1}\right)^2 \times \sigma_{L_1}^2 + \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial L_2}\right)^2 \times \sigma_{L_2}^2 + \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial L_3}\right)^2 \times \sigma_{L_3}^2}$$

$$\sigma_{\bar{L}} = \pm \frac{1}{[P]} \sqrt{(P_1 \cdot \sigma_1)^2 + (P_2 \cdot \sigma_2)^2 + (P_3 \cdot \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{\bar{L}} = \pm \frac{1}{[P]} \sqrt{(P_1 \cdot \sigma_1)^2 + (P_2 \cdot \sigma_2)^2 + (P_3 \cdot \sigma_3)^2} = \pm \frac{1}{25} \sqrt{\left(9 \times \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + (4 \times \sqrt{3})^2 + (12 \times 1)^2}$$

$$\sigma_L = \pm \frac{1}{25} \times \sqrt{108 + 48 + 144} = \pm \frac{\sqrt{300}}{25} = \pm 0.7cm$$

∴ 該段距離之平均值=50.07m 與中誤差=±0.7cm

【命中特區】書名：測量平差法

作者：賴明 章節出處：第二章誤差傳播定律及其應用之二、誤差傳播定律之應用



志光.學儒.保成

專屬工科人的工頂人生

我們都上榜了!

連過三榜 雙料金榜 眾多連續上榜，再創工科巔峰！地方特考、台電職員蓄勢待發

李○庭 109年鐵路員級機械工程【全國探花】 連過三榜 109年普考機械工程	楊○坤 109年鐵路特考電子工程【全國榜眼】 蔡○全 109年鐵路特考機械工程【全國第四】	柯○晉 109年普考資訊處理 彭○琳 109年普考資訊處理	林○謙 109年普考電力工程 黃○穎 109年普考電力工程
陳○憲 109年鐵路特考電子工程【全國榜眼】	張○鈺 109年普考電力工程【全國第五】	李○ 109年普考資訊處理	蘇○宏 109年普考電子工程

激賞 109年工科上榜菁英齊聚

普考 資訊處理 許○
 普考 資訊處理 范○毅
 普考 資訊處理 李○豪
 普考 資訊處理 徐○遠
 普考 資訊處理 張○賢
 普考 資訊處理 郭○豐
 普考 資訊處理 李○修
 普考 資訊處理 陳○宇
 普考 資訊處理 楊○婷
 普考 資訊處理 陳○夫
 普考 資訊處理 周○
 普考 資訊處理 黃○慈
 普考 資訊處理 劉○如
 普考 資訊處理 賴○程
 普考 資訊處理 陳○婷
 普考 資訊處理 林○靜
 普考 資訊處理 趙○宏
 普考 電力工程 蔡○安

普考 電力工程 江○廷
 普考 電力工程 馮○嘉
 普考 電力工程 陳○宇
 普考 電力工程 薛○辰
 普考 電力工程 黃○喻
 普考 電力工程 孫○德
 普考 電力工程 吳○翰
 普考 電力工程 黃○德
 普考 電力工程 何○霖
 普考 電力工程 許○瑜
 普考 電力工程 朱○竹
 普考 電力工程 洪○銓
 普考 電力工程 張○維
 普考 電力工程 吳○泓
 普考 電力工程 王○宏
 普考 電力工程 曾○維
 普考 電力工程 古○芳
 普考 電力工程 張○誠

普考 機械工程 范○澤
 普考 機械工程 常○倫
 普考 機械工程 林○彬
 普考 機械工程 陳○雄
 普考 機械工程 陳○修
 普考 化學工程 謝○洋
 普考 資訊處理 李○諺
 普考 資訊處理 劉○傑
 普考 資訊處理 林○翔
 普考 資訊處理 陳○義
 普考 資訊處理 林○正
 普考 資訊處理 顏○恆
 普考 資訊處理 簡○琪
 普考 資訊處理 蘇○正
 普考 資訊處理 謝○詳
 普考 資訊處理 蔡○
 普考 資訊處理 陳○錡
 普考 資訊處理 許○如

鐵路特考佐級 養路工程 邱○富
 鐵路特考佐級 養路工程 薄○軒
 鐵路特考佐級 養路工程 陳○同
 鐵路特考佐級 養路工程 林○鈞
 鐵路特考佐級 電子工程 周○傑
 鐵路特考佐級 電子工程 郭○維
 鐵路特考佐級 電子工程 廖○翔
 鐵路特考佐級 電子工程 王○洋
 鐵路特考佐級 電子工程 鍾○承
 鐵路特考佐級 電子工程 陳○儒
 鐵路特考佐級 電子工程 蔡○穎
 鐵路特考佐級 機械工程 李○億
 鐵路特考佐級 機械工程 林○潤
 鐵路特考佐級 機械工程 張○祺
 鐵路特考佐級 機械工程 蘇○雅
 鐵路特考佐級 機械工程 石○玄
 鐵路特考佐級 機械工程 陳○民

鐵路特考佐級 機檢工程 賴○威
 鐵路特考佐級 機檢工程 徐○成
 台電僱員 電鍍技術類 曾○綱
 台電僱員 保健物理類 黃○妹
 台電僱員 變電設備維護類 林○佑
 台電僱員 機械運轉維護類 趙○瑄
 台電僱員 機械運轉維護類 甯○軒
 台電僱員 配電線路維護類 范○瑋
 台電僱員 配電線路維護類 陳○佑
 台電僱員 配電線路維護類 黃○枉
 台電僱員 配電線路維護類 何○緯
 台電僱員 配電線路維護類 林○豪
 台電僱員 配電線路維護類 李○榮
 台電僱員 配電線路維護類 蔡○晴
 台電僱員 配電線路維護類 楊○凱
 台電僱員 配電線路維護類 戴○霖
 台電僱員 配電線路維護類 張○哲

版面有限，僅向未刊登者致歉