

109 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等別：三等考試

類科：機械工程

科目：自動控制

一、考慮一閉迴路系統，其開迴路轉移函數為：

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+4)(s^2+48)}{s(s^2+16)}$$

(一)試繪製其閉迴路極點於實軸之根軌跡 (Root Locus)。(5 分)

(二)決定一條根軌跡之離開角 (Departure Angle) 與到達角 (Arrival Angle)，須註明極點與零點位置及 K 的正負號條件。(5 分)

(三)試繪製包含 K 可為正負值之完整根軌跡。(10 分)

(四)由羅斯表 (Routh Table) 決定 K 形成該閉迴路 BIBO 之穩定條件。(5 分)

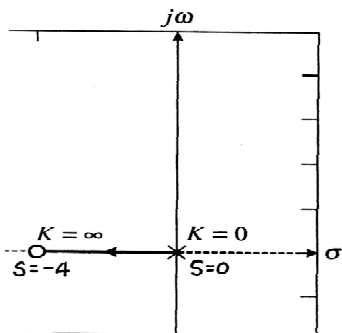
【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★

2. 《解題關鍵》瞭解根軌跡之繪圖步驟依序畫出

【擬答】

(一)迴路極點於實軸之根軌跡如下



(二)離開角

$$P = -j4$$

$$K > 0$$

$$180^\circ + \angle (s+j4) \times \frac{(s+4)(s^2+48)}{s(s+16)} \Big|_{s=-j4} = 180^\circ + \angle \frac{(4-j4)(32)}{-j4 \times (-j8)}$$

$$= 180^\circ + \angle -45^\circ - 180^\circ = -45^\circ$$

$$P = j^4$$

$$180^\circ + \angle (s-j4) \times \frac{(s+4)(s^2+48)}{s(s+16)} \Big|_{s=j4} = 180^\circ + \angle \frac{(4+j4)(32)}{j4 \times (j8)}$$

$$= 180^\circ + \angle 45^\circ - 180^\circ = 45^\circ$$

K < 0 與 K > 0 角度相差 180 度

到達角

$$z = -j4\sqrt{3}$$

$$180^\circ + \angle \frac{(s+4)(s^2+48)}{s(s+16)(s+j4\sqrt{3})} \Big|_{s=-j4\sqrt{3}} = 180^\circ + \angle \frac{(4-j4\sqrt{3})(-j8\sqrt{3})}{-j4\sqrt{3} \times (-32)}$$

公職王歷屆試題 (109 地方特考)

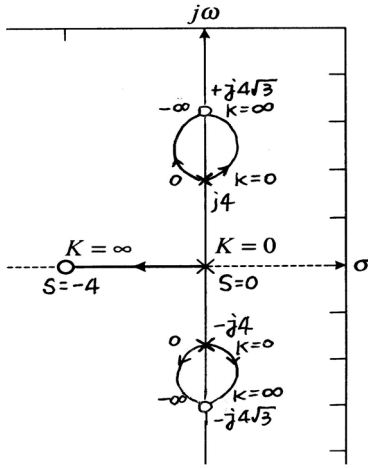
$$= 180^\circ + \angle -60^\circ - 180^\circ = -60^\circ$$

$$z = j4\sqrt{3}$$

$$180^\circ + \angle \frac{(s+4)(s^2+48)}{s(s+16)(s-j4\sqrt{3})} \Big|_{s=j4\sqrt{3}} = 180^\circ + \angle \frac{(4+j4\sqrt{3})(j8\sqrt{3})}{j4\sqrt{3} \times (-32)}$$

$$= 180^\circ + \angle 60^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

(三)完整根軌跡如下



$$(四) 1 + KG(s)H(s) = \frac{s(s^2+16) + K(s+4)(s^2+48)}{s(s^2+16)} = \frac{(1+K)s^3 + (4K)s^2 + (48K+16)s + 112K}{s(s^2+16)} = 0$$

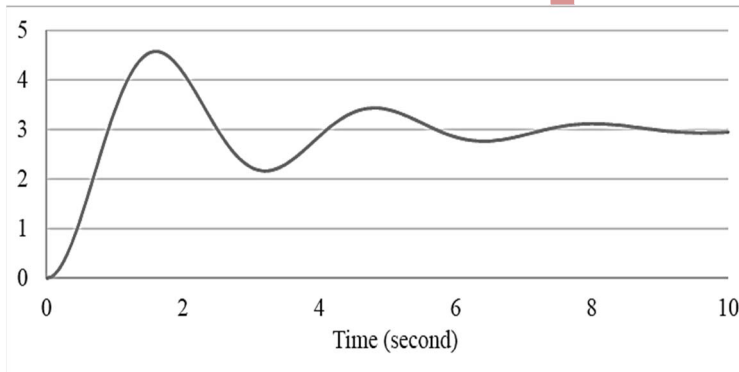
s^3	$1+K$	$48K+16$
s^2	$4K$	$112K$
s^1	$\frac{112K^2+64K-112K^2-112K}{4K} = -12$	0
s^0	$112K$	

穩定之條件： $1+K < 0 \Rightarrow K < -1$

二、一個不具有零點之二階系統的單位步階響應 (Unit Step Response) 如下圖所示：

(一)試找出該二階系統之拉普拉斯轉換 (Laplace Transform)，須說明決定該拉普拉斯轉換的理由。(15分)

(二)試決定該二階系統之單位斜坡響應 (Unit Ramp Response) 之時間函數。(10分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★
2. 《解題關鍵》使用二階時域參數求出二階拉氏轉換式

【擬答】

(一)最大超越量 $M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{4.5-3}{3} = 0.5 = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = 0.2155$

尖峰時間 $T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.7 \Rightarrow \omega_n = 1.89\text{rad/s}$

穩態誤差 $e_{ss} = r(\infty) - y(\infty) = 1.0 - 3.0 = -2.0$

則

閉迴路轉移函數 $T(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{3.5721K}{s^2 + 0.8146s + 3.5721}$

利用終值定理 $\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sT(s) \times \frac{1}{s} = K = -2$

所以轉移函數 $T(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{-7.1442}{s^2 + 0.8146s + 3.5721}$

(二)單位斜坡響應為 $Y(s) = \frac{-7.1442}{s^2(s^2 + 0.8146s + 3.5721)}$

部分分式展開為 $Y(s) = \frac{-7.1442}{s^2(s^2 + 0.8146s + 3.5721)} = \frac{-2}{s^2} + \frac{0.456}{s} + \frac{-0.456s + 1.629}{s^2 + 0.8146s + 3.5721}$

$Y(s) = \frac{-7.1442}{s^2(s^2 + 0.8146s + 3.5721)} = \frac{-2}{s^2} + \frac{0.456}{s} + \frac{-0.456(s + 0.4073) + 1.8147}{(s + 0.4073)^2 + 1.846^2}$

$y(t) = (-2t + 0.456 - 0.456e^{-0.4073t} \cos 1.846t + 0.983e^{-0.4073t} \sin 1.846t) u(t)$

志光·學儒·保成

專屬工科人的工頂人生

我們都上榜了!

連過三榜 雙料金榜 眾多連續上榜，再創工科巔峰！地方特考、台電職員蓄勢待發

李○庭 109年鐵路員級機械工程【全國探花】	楊○坤 109年鐵路特考電子工程【全國榜眼】	柯○智 109年普考資訊處理	林○瑞 109年普考電力工程
109年普考機械工程	109年普考電子工程	109年普考資訊處理	109年鐵路特考電力工程
連過三榜 109年普考機械工程	蔡○全 109年鐵路特考機械工程【全國第四】	彭○琳 109年普考資訊處理	鄧○威 109年普考機械工程
	109年普考機械工程	109年普考資訊處理	109年普考機械工程
陳○憲 109年鐵路特考電子工程【全國榜眼】	張○鈺 109年普考電力工程【全國第五】	李○ 109年普考資訊處理	黃○穎 109年鐵路特考電力工程
109年普考電子工程	109年普考電力工程	109年普考資訊處理	109年普考電力工程
		蘇○宏 109年普考電子工程	曾○倫 109年普考電力工程
		109年鐵路特考資訊處理	109年普考電力工程

109年工科上榜菁英齊聚

高考 資訊處理 許○ 高考 資訊處理 范○毅 高考 資訊處理 李○印 高考 資訊處理 徐○慎 高考 資訊處理 張○聿 普考 資訊處理 郭○豐 普考 資訊處理 李○修 普考 資訊處理 陳○宇 普考 資訊處理 楊○婷 普考 資訊處理 陳○夫 普考 資訊處理 周○ 普考 資訊處理 黃○慈 普考 資訊處理 劉○如 普考 資訊處理 賴○程 普考 資訊處理 林○靜 普考 資訊處理 趙○宏 高考 電力工程 蔡○安	高考 電力工程 江○廷 高考 電力工程 馮○嘉 高考 電力工程 陳○宇 高考 電力工程 薛○辰 高考 電力工程 黃○倫 普考 電力工程 孫○德 普考 電力工程 吳○翰 普考 電力工程 黃○德 普考 電力工程 何○霖 普考 電力工程 許○瑜 普考 電力工程 朱○竹 普考 電力工程 洪○銓 普考 電力工程 張○維 普考 電力工程 吳○泓 普考 電力工程 王○宏 普考 電力工程 曾○維 普考 電力工程 古○芳 普考 電力工程 張○誠	普考 機械工程 范○澤 普考 機械工程 常○倫 普考 機械工程 林○彬 普考 機械工程 陳○雄 普考 機械工程 陳○修 普考 化學工程 謝○洋 鐵路特考員級 電力工程 李○諺 鐵路特考員級 電力工程 劉○傑 鐵路特考員級 電力工程 陳○義 鐵路特考員級 電力工程 林○翔 鐵路特考員級 電力工程 顏○恆 鐵路特考員級 電力工程 簡○琪 鐵路特考員級 電力工程 蘇○正 鐵路特考員級 電力工程 謝○詳 鐵路特考員級 電力工程 蔡○ 鐵路特考員級 電力工程 陳○錡 鐵路特考員級 電力工程 許○如	鐵路特考佐級 養路工程 邱○富 鐵路特考佐級 養路工程 薄○軒 鐵路特考佐級 養路工程 陳○同 鐵路特考佐級 養路工程 林○鈞 鐵路特考佐級 電子工程 周○傑 鐵路特考佐級 電子工程 郭○維 鐵路特考佐級 電子工程 廖○翔 鐵路特考佐級 電子工程 王○洋 鐵路特考佐級 電子工程 鍾○承 鐵路特考佐級 電子工程 陳○鼎 鐵路特考佐級 電子工程 蔡○類 鐵路特考佐級 機械工程 李○億 鐵路特考佐級 機械工程 林○潤 鐵路特考佐級 機械工程 張○祺 鐵路特考佐級 機械工程 蘇○雅 鐵路特考佐級 機械工程 石○玄 鐵路特考佐級 機械工程 陳○民	鐵路特考佐級 機檢工程 賴○威 鐵路特考佐級 機檢工程 徐○成 台電僱員 電鍍技術類 曾○綱 台電僱員 保健物理類 黃○妹 台電僱員 變電設備維護類 趙○佑 台電僱員 機械運輸維護類 何○瑄 台電僱員 機械運輸維護類 甯○軒 台電僱員 配電線路維護類 范○琿 台電僱員 配電線路維護類 陳○佑 台電僱員 配電線路維護類 黃○冠 台電僱員 配電線路維護類 何○緯 台電僱員 配電線路維護類 林○豪 台電僱員 配電線路維護類 李○榮 台電僱員 配電線路維護類 蔡○晴 台電僱員 配電線路維護類 楊○凱 台電僱員 配電線路維護類 戴○霖 台電僱員 配電線路維護類 張○哲
---	--	--	---	--

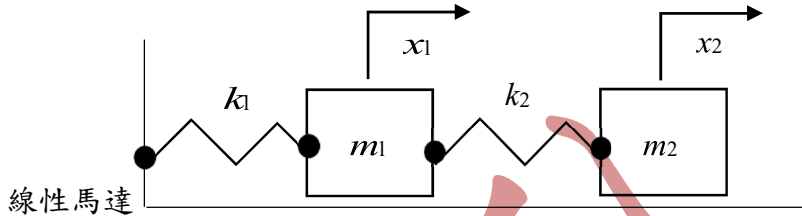
版面有限，僅向未刊登者致歉

公職王歷屆試題 (109 地方特考)

三、如下圖所示，有兩個質量滑塊滑行於無摩擦力平面上，兩質量滑塊間有一彈簧牽住，第一個質量滑塊與牆壁間亦有一彈簧，各滑塊係於各彈簧無預力時之初始位置，其中第一個質量滑塊被其下方之線性馬達驅動滑行，其位置命令為 $x_{1,cmd}$ ，並以單位負回授方式比較與實際位移 x_1 間之差異，再以比例控制增益 K 調整該線性馬達出力 F 。

(一) 試繪製 $x_{1,cmd}$ 為輸入且 x_1 為輸出時之方塊圖。(10 分)

(二) 試推導 $x_{1,cmd}$ 為單位步階函數時之穩態誤差。(15 分)



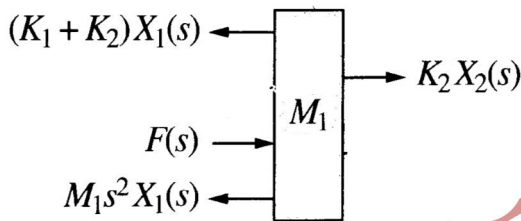
【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★

2. 《解題關鍵》利用力平衡求出微分方程式後轉換成拉氏表示式即可求出

【擬答】

(一) 方塊圖如下



$$x_1 = \frac{K}{1+K} x_{1,cmd}$$

(二) 方程式如下

$$m_1 \frac{K}{1+K} s^2 x_{1,cmd} = m_1 s^2 X_1(s) + (K_1 + K_2) X_1(s) - K_2 X_2(s) \quad \text{-----(1)}$$

$$m_2 s^2 X_2(s) + K_2 X_2(s) - K_2 X_1(s) = 0 \quad \text{-----(2)}$$

由(2)式 $X_1(s) = \frac{1}{K_2} (m_2 s^2 + K_2) X_2(s)$ 代入(1)式

$$m_1 \frac{K}{1+K} s^2 x_{1,cmd} = \left[\frac{m_1 m_2 s^4 + (m_1 K_1 + m_2 K_1 + m_2 K_2) s^2 + K_1 K_2}{K_2} \right] X_2(s)$$

則

$$\frac{X_2(s)}{X_{1,cmd}(s)} = \frac{m_1 K K_2 s^2}{[m_1 m_2 s^4 + (m_1 K_1 + m_2 K_1 + m_2 K_2) s^2 + K_1 K_2] (1+K)}$$

穩態誤差為

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - y(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{s} \left(1 - \frac{m_1 K K_2 s^2}{[m_1 m_2 s^4 + (m_1 K_1 + m_2 K_1 + m_2 K_2) s^2 + K_1 K_2] (1+K)} \right) \right] = 1$$

志光.學儒.保成 規劃了豐富完整的課程

精心安排專屬**工科人**的學習規劃，最完整的上榜課程

工科考試所需要的準備，我們通通幫你安排好了



- 法科架構班**：學校沒教的，我們教給你！名師精解法科知識，結合實務例子，助你建構法科概念。
- 扎實正規班**：完整堂數規劃，循序漸進學習，讓您深度修習工科各專業學科知識。
- 作文實戰班**：作文再也不是理工人的痛！透過專業老師的輔導，快速強化您的寫作架構、邏輯概念。
- 主題題庫班**：主題式教學，搭配各類試題演練，進行考點分析及破題要點訓練，讓您短時間各科實力倍增。
- 精華總複習**：考前重點總複習，精準掌握重要考點，讓您考前實力突飛猛進。
- 時事議題修法要點**：自己沒時間彙整最新資訊沒關係！完整時事補充，修法即時解析，考前重點全面補遺。
- 考前提要關懷講座**：名師考前最終提點，穩定你累積許久的實力，讓你的觀念更加清晰。
- 全國全真模擬考**：檢視應考實力、訓練臨場反應、掌握最新考題趨勢，全程比照考試時程，模擬考場實戰氛圍，讓您能以平常心應考！

四、考慮一閉迴路系統，其開迴路轉移函數為：

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{-(20 + j10\omega)}{3 + \omega^2 + 2j\omega}$$

(一)試繪製波德圖 (Bode Plot) (10 分)

(二)試繪製奈氏圖 (Nyquist Plot) (15 分)

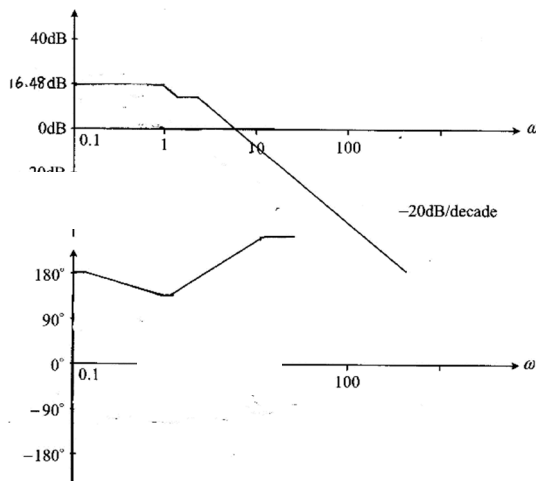
【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★
2. 《解題關鍵》瞭解波德圖與奈氏圖之畫法即可求出

【擬答】

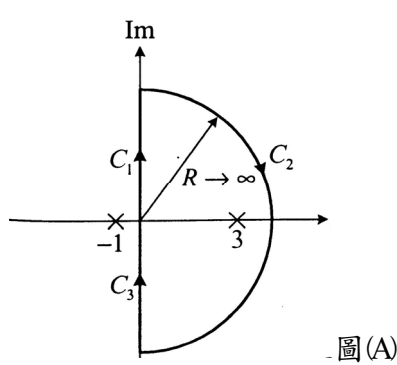
$$\Rightarrow G(s)H(s) = -\frac{20}{3} \frac{(1 + \frac{s}{2})}{(1+s)(1-\frac{s}{3})}$$

波德圖如下

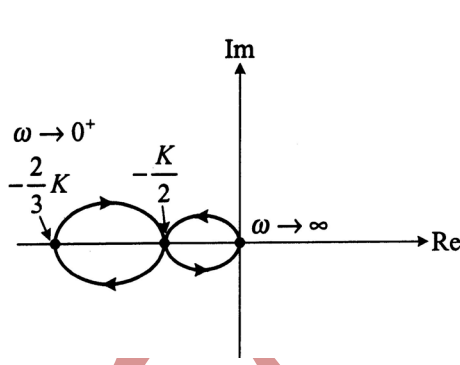


$$\Rightarrow G(s)H(s) = \frac{-10(s+2)}{-(s+1)(s-3)} = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s-3)} \Rightarrow K=10$$

1. 先畫出奈氏路徑圖如圖(A)所示



圖(A)



圖(B)

2. C_1 映射： $s=j\omega$ ； $\omega: 0^+ \rightarrow \infty$

$$(1) G(j0)H(j0) = -\frac{2}{3}K$$

$$(2) G(j\infty)H(j\infty) = 0 \angle -90^\circ$$

$$(3) G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(j\omega+2)}{(j\omega+1)(j\omega-3)} = K \frac{(-6-4\omega^2)+j\omega(1-\omega^2)}{(\omega^2+3)^2+4\omega^2}$$

$$\text{Re}[G(j\omega)H(j\omega)] = \text{負}$$

$$\text{Im}[G(j\omega)H(j\omega)] = \text{由正} \rightarrow 0 \rightarrow \text{負}$$

$$(4) \text{Im}[G(j\omega)H(j\omega)] = 0 \Rightarrow \omega = 1 \Rightarrow \text{Re}[G(j\omega)H(j\omega)] = -0.5K$$

3. C_2 映射在原點上

4. C_3 映射：與 C_1 映射同對稱於實軸，如圖(B)所示



我們專屬設計的學習模式， 讓你聰明學習輕鬆投考！

我們都在志光.學儒.保成 成功找到工科人的工頂人生

學習模式



面授學習

直接，有效

- 實際面對面教學，現場解決您的疑惑。
- 優質專業名師，幫您統整、分析考試重點資訊。
- 定期的大小測驗，您可隨時檢視學習效果。



雲端函授

自主，彈性

- 不用煩惱通勤問題，課程教材直接送到家。
- 反覆聽課，不怕觀念聽不懂。
- 完全自由，可自主安排學習進度。



視訊學習

便利，專注

- 安靜舒適的上課環境，提高您的專注力。
- 看課時間能自由預約，無須擔心時間衝突。
- 可依需求暫停、倒轉或快轉，深度學習超簡單。

中年失業報考公職

求職APP裡都是已讀不回，轉個念，重拾課本念書，靠自己努力去爭取一分穩定工作，贏回自己未來的人生；也為了自己的家庭、小孩繼續的打拼下去。

8個月考取 地方特考 四等機械工程 盧○偉



期望大學畢業後即就業

透過老師傾囊相授以及課程安排，很快地便對各考科有一定的程度。並從模擬考中得知是否有不熟、不懂的地方，使我更加針對不足之處加強，一次又一次成績大幅提升使人信心大增！

1年考取/應屆考取 鐵路特考 佐級機械工程 陳○謙



資源豐富幫助我很多

在朋友推薦和試聽後發現也蠻不錯的，且距離家也近，補習班有良好的讀書環境，剛開始我完全不知道該如何準備，就去問補習班的櫃台小姐，他們都很熱心的提供各種方式及管道。

高普雙榜 高普考 電力工程 蔡○霖

