

110年公務人員高等考試三級考試試題

等別：三等考試
類科：土木工程
科目：測量學

一、於某一基線場使用特定之全站儀(Total Station)與稜鏡組合進行率定測量作業，所得順向施測水平距離如下表，試列出觀測方程式及說明計算過程求此儀器組合測距之精度 $\pm(C+S \times D)$ mm，即求其中之C加常數(單位mm)、S乘常數(無單位ppm)之值，及計算此一率定成果之中誤差。(25分)

| 項次 | 順向施測 (儀器站→稜鏡站) | 已知水平距離D' (m) | 實測水平距離D(m) |
|----|-------------------|--------------|------------|
| 1 | 0→1 | D_1' | D_1 |
| 2 | 0→2 | D_2' | D_2 |
| 3 | 0→3 | D_3' | D_3 |
| 4 | 1→3 | D_4' | D_4 |
| 5 | 2→3 | D_5' | D_5 |

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：加常數、乘常數、率定成果之中誤差。

重點提要：觀測方程式、改正數方程式、間接觀測平差、最小二乘法。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材的補充講義-測量平差 (2021 年版)

作者：賴明

章節出處：補充講義-測量平差 第三章 間接觀測平差。

【擬答】：

理論上， $D_i' = D_i + C + S \times D_i$ ，

$\therefore D_i$ (單位 m)， D_i' (單位 m)，C (單位 mm)，S (無單位 ppm)， $1\text{ppm} = 10^{-6}\text{mm/mm}$

如以 m 為單位，則 $D_i' = D_i + \frac{C}{1000} + \frac{S}{1000} \times \frac{D_i}{1000} = D_i + \frac{C}{1000} + \frac{S}{1,000,000} \times D_i$

令 $C' = \frac{C}{1000}$ ， $S' = \frac{S}{1,000,000}$ ，則 $D_i' = D_i + C' + S' \times D_i$ ， $C = 1000C'$ ， $S = 10^6 \cdot S'$

欲求解 C' 與 S' ，未知數=2，觀測數=5，自由度(多餘觀測數)=5-2=3

擬採測量平差法之間接觀測平差，間接觀測平差是基於最小二乘法

改正數 v_i ： $v_i = D_i' - (D_i + C' + S' \times D_i)$ ， $v_i = -C' - S' \times D_i - (D_i - D_i')$ 或

$$(D_i - D_i') + v_i = -C' - S' \times D_i$$

$$\text{觀測方程式} \begin{cases} (D_1 - D_1') + v_1 = -C' - S' \times D_1 \\ (D_2 - D_2') + v_2 = -C' - S' \times D_2 \\ (D_3 - D_3') + v_3 = -C' - S' \times D_3 \\ (D_4 - D_4') + v_4 = -C' - S' \times D_4 \\ (D_5 - D_5') + v_5 = -C' - S' \times D_5 \end{cases}, \text{改正數方程式} \begin{cases} v_1 = -C' - S' \times D_1 - (D_1 - D_1') \\ v_2 = -C' - S' \times D_2 - (D_2 - D_2') \\ v_3 = -C' - S' \times D_3 - (D_3 - D_3') \\ v_4 = -C' - S' \times D_4 - (D_4 - D_4') \\ v_5 = -C' - S' \times D_5 - (D_5 - D_5') \end{cases}$$

矩陣式 $V = AX - L$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & -D_1 \\ -1 & -D_2 \\ -1 & -D_3 \\ -1 & -D_4 \\ -1 & -D_5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} C' \\ S' \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} D_1 - D_1' \\ D_2 - D_2' \\ D_3 - D_3' \\ D_4 - D_4' \\ D_5 - D_5' \end{bmatrix}$$

組法方程式： $NX = U$ ， $N = A^T A$ ， $U = A^T L$

$$N = A^T A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 & -D_4 & -D_5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -D_1 \\ -1 & -D_2 \\ -1 & -D_3 \\ -1 & -D_4 \\ -1 & -D_5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 \\ D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 & D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + D_5^2 \end{bmatrix}$$

$$U = A^T L = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 & -D_4 & -D_5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D_1 - D_1' \\ D_2 - D_2' \\ D_3 - D_3' \\ D_4 - D_4' \\ D_5 - D_5' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} D_1' - D_1 + D_2' - D_2 + D_3' - D_3 + D_4' - D_4 + D_5' - D_5 \\ D_1(D_1' - D_1) + D_2(D_2' - D_2) + D_3(D_3' - D_3) + D_4(D_4' - D_4) + D_5(D_5' - D_5) \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{|N|} \times \begin{bmatrix} D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + D_5^2 & -(D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5) \\ -(D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5) & 5 \end{bmatrix}$$

式中；N 矩陣之行列式值 $|N| = 5 \cdot (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + D_5^2) - (D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5)^2$

未知量矩陣 $X = N^{-1}U$

$$X = \frac{1}{|N|} \times \begin{bmatrix} D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + D_5^2 & -(D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5) \\ -(D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5) & 5 \end{bmatrix} \times U$$

$$\text{未知量 } C' = \frac{1}{|N|} \times \left\{ \left[(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + D_5^2) \times (D_1' - D_1 + D_2' - D_2 + \dots + D_5' - D_5) \right] \right.$$

$$\left. - (D_1 + D_2 + \dots + D_5) \times [D_1(D_1' - D_1) + D_2(D_2' - D_2) + \dots + D_5(D_5' - D_5)] \right\}$$

$$\text{未知量 } S' = \frac{1}{|N|} \left\{ - (D_1 + D_2 + \dots + D_5) \times [(D_1' - D_1) + (D_2' - D_2) + \dots + (D_5' - D_5)] \right.$$

$$\left. + 5 [D_1(D_1' - D_1) + D_2(D_2' - D_2) + \dots + D_5(D_5' - D_5)] \right\}$$

未知數 C', S' 代回改正數方程式，得改正數 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2$$

此一率定成果之中誤差 $\sigma_o = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{5-2}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{3}}$ 式中；n：觀測數。u：未知數

$$\text{加常數中誤差 } \sigma_C = \pm \sigma_o \times \sqrt{\frac{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + D_5^2}{|N|}}$$

$$\text{乘常數中誤差 } \sigma_{S'} = \pm \sigma_o \times \sqrt{\frac{5}{|N|}}$$

$$C = 1000C', S = 10^6 \cdot S', \sigma_C = 1000 \cdot \sigma_{C'}, \sigma_S = 10^6 \cdot \sigma_{S'}$$

二、於二維水平面中測量不共線三點A、B、C間之水平距離分別為AB=102.32m、AC=140.24m、BC=192.54m，若距離觀測為獨立且中誤差均為±0.05m，試求三角形ABC面積及其中誤差。(25分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★★
2. 《破題關鍵》關鍵字：三角形面積及其中誤差、誤差傳播定律之應用。
重點提要：由三邊長度直接計算面積的公式，要熟記。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2021 年版)

作者：賴明

章節出處：第一章 測量概論 第5節 誤差傳播定律之應用

【擬答】：

(一)計算三角形 ABC 面積

$$\text{令 } a = \overline{BC} = 192.54m, b = \overline{AC} = 140.24m, c = \overline{AB} = 102.32m$$

$$\text{令 } s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(192.54+140.24+102.32) = 217.55m$$

$$\text{面積 } A: A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

$$s-a = 217.55 - 192.54 = 25.01, s-b = 217.55 - 140.24 = 77.31,$$

$$s-c = 217.55 - 102.32 = 115.23$$

$$\text{面積 } A: A = \sqrt{217.55 \times 25.01 \times 77.31 \times 115.23} = 6962.048m^2$$

(二)計算三角形 ABC 面積之中誤差

$$\because A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \quad \therefore A^2 = s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c), s-a = \frac{1}{2}(-a+b+c), s-b = \frac{1}{2}(a-b+c), s-c = \frac{1}{2}(a+b-c)$$

$$A^2 = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \frac{1}{2}(-a+b+c) \cdot \frac{1}{2}(a-b+c) \cdot \frac{1}{2}(a+b-c)$$

$$A^2 = \frac{1}{16}[(b+c)^2 - a^2] \times [a^2 - (b-c)^2] = \frac{1}{16}(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2)$$

採用隱函數微分法，等式左右同時取微分

$$\frac{\partial}{\partial a} A^2 = \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{1}{16}(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2) \right]$$

$$2A \cdot \frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{16}(-4a^3 + 4ab^2 + 4ac^2), \frac{\partial A}{\partial a} = \frac{a \cdot (b^2 + c^2 - a^2)}{8A}, \text{同理}$$

$$\frac{\partial A}{\partial b} = \frac{b \cdot (a^2 - b^2 + c^2)}{8A}, \frac{\partial A}{\partial c} = \frac{c \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{8A}$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{a \cdot (b^2 + c^2 - a^2)}{8A} = \frac{192.54}{8 \times 6962.048} \times (-192.54^2 + 140.24^2 + 102.32^2) = -23.974$$

$$\frac{\partial A}{\partial b} = \frac{b \cdot (a^2 - b^2 + c^2)}{8A} = \frac{140.24}{8 \times 6962.048} \times (192.54^2 - 140.24^2 + 102.32^2) = 70.184$$

$$\frac{\partial A}{\partial c} = \frac{c \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{8A} = \frac{102.32}{8 \times 6962.048} \times (192.54^2 + 140.24^2 - 102.32^2) = 85.002$$

$$\text{面積中誤差 } \sigma_A = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^2 \times \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)^2 \times \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)^2 \times \sigma_c^2}$$

公職王歷屆試題 (110 高考三級)

∵ 距離觀測為獨立且中誤差均為 $\pm 0.05m$ ∴ $\sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = \pm 0.05m$

面積中誤差 $\sigma_A = \pm 0.05 \times \sqrt{(-23.974)^2 + 70.184^2 + 85.002^2} = \pm 5.64m^2$

∴ 三角形 ABC 面積及其中誤差 = $6962.05m^2 \pm 5.64m^2$

三、於二維平面直角(E、N)坐標系統中二已知點A(100.00,50.80)、B(480.00,152.30)，今使用一台全站儀設置測站於A點，後視B點將水平角度盤歸零，觀測C點水平角讀數為 $300^\circ 0'00''$ ；移置測站於B點，後視A點將水平角度盤歸零，觀測C點水平角讀數為 $65^\circ 0'0''$ ，試繪草圖及列出觀測方程式計算C點平面坐標(E_C, N_C)。(25分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：前方交會法。重點提要：全站儀操作時，順時針旋轉角度增加，水平角有可能是內角或外角。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2021 年版)

作者：賴明

章節出處：第一章測量概論 之 第 4 節測量基本計算與原理 之 二、測量的基本原理

【擬答】：

∵ 水平角度盤順時鐘旋轉時，其角度增加

∴ 設站於 A 點，後視 B 點，觀測 C 點之水平角讀數為外角

設站於 B 點，後視 A 點，觀測 C 點之水平角讀數為內角

設： $\alpha = \angle CAB = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$ ， $\beta = \angle ABC = 65^\circ$

使用前方交會法

(一)由 A、B 二點坐標，得距離 \overline{AB} 、方位角 ϕ_{AB}

$$\Delta E_{AB} = E_B - E_A = 480.00 - 100.00 = 380.00m > 0$$

$$\Delta N_{AB} = N_B - N_A = 152.30 - 50.80 = 101.50m > 0, \text{ 第 I 象限}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(\Delta E_{AB})^2 + (\Delta N_{AB})^2} = \sqrt{380.00^2 + 101.50^2} = 393.322m$$

$$\phi_{AB} = \tan^{-1} \frac{\Delta E_{AB}}{\Delta N_{AB}} = \tan^{-1} \frac{380.00}{101.50} = 75^\circ 2' 42.45''$$

(二)三內角和 $= 180^\circ$

$$\gamma = \angle BCA = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 60^\circ - 65^\circ = 55^\circ$$

(三)由正弦定律計算 \overline{AC}

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \beta} = \frac{\overline{AB}}{\sin \gamma}, \overline{AC} = \overline{AB} \times \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 393.322 \times \frac{\sin 65^\circ}{\sin 55^\circ} = 435.17m$$

(四)計算 ϕ_{AC} ：如圖

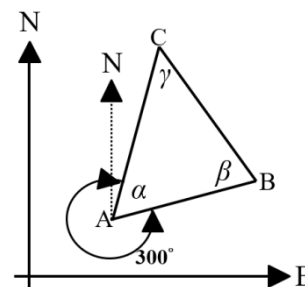
$$\phi_{AC} = \phi_{AB} - \alpha = 75^\circ 02' 42.45'' - 60^\circ = 15^\circ 02' 42.45''$$

(五)計算 C 點坐標 (E_C, N_C)

$$E_C = E_A + \overline{AC} \cdot \sin \phi_{AC} = 100.00 + 435.17 \times \sin 15^\circ 02' 42.45'' = 212.96m$$

$$N_C = N_A + \overline{AC} \cdot \cos \phi_{AC} = 50.80 + 435.17 \times \cos 15^\circ 02' 42.45'' = 471.05m$$

∴ C 點平面坐標 (E_C, N_C) = (212.96m, 471.05m)



四、精密水準測量一般使用精密水準儀搭配平行玻璃板測微器(Parallel plate micrometer)與鋼水準尺施測，試繪簡圖並說明平行玻璃板測微器之作用原理。(25分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★

【擬答】：

(一) 平行玻璃板

平行玻璃板是指在望遠鏡物鏡前端，加裝 2 個互相平行的玻璃板，其作用是在藉由玻璃板的傾斜折光，使視準軸平行升降，來精密讀定標尺上最小分劃的小數值。

(二) 平行玻璃板測微器的構造與作用原理

構造如右圖。平行玻璃板與測微鼓(器)依靠一支連桿互相連結。

當測微器旋轉時，連桿帶動平行玻璃板，使之傾斜，視準軸亦隨之升高或下降，其所升降之距離為 δ ， δ 之大小視玻璃板的傾斜角度而定。

測微器旋轉一周，視準軸在水準尺上，正好移動一個最小刻劃的間隔；因此，能從測微器的旋轉，精密地讀到水準尺最小刻劃內的讀數。

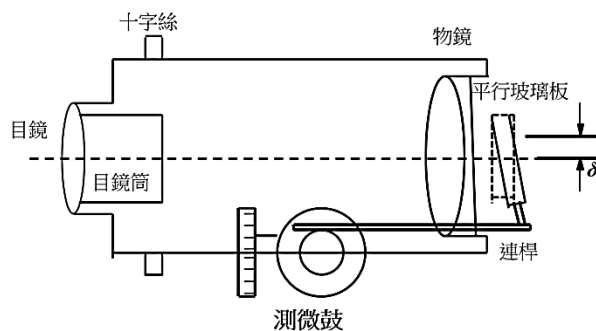
當測微器刻劃為 100 分劃，則可讀到水準尺最小分化的百分之一，即 0.01mm。

(三) 觀測讀數時

應先旋轉測微器，使視線切於水準尺上的整分劃，例如：152cm。

再讀定測微器上的讀數，例如：87.6(最後一位為估計值)，實則為 $87.6/100=0.876$ 。

合併的讀數為 $152+0.876=152.876\text{cm}=1.52876\text{m}$ 。



職
王