

110 年公務人員高等考試三級考試試題

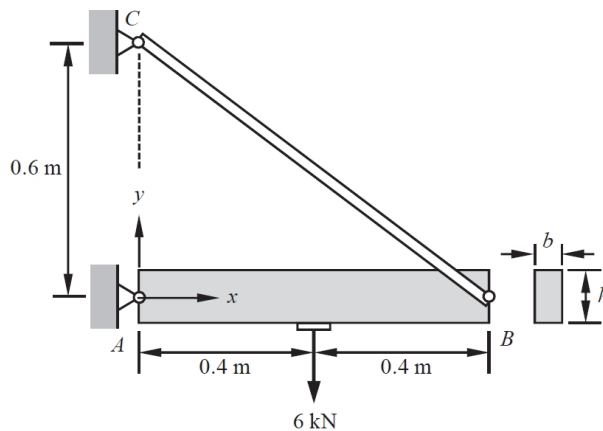
類 科：機械工程

科 目：工程力學（包括靜力學、動力學與材料力學）

第一、二題：簡立強老師；第三、四題：力升老師

一、如圖所示，一吊桿由梁 AB 與桿件 BC 構成，兩者於 B 處銷接（pin connected），末端 A 與 C 固定於剛性牆之銷支撐（pin support）。梁的截面為 b （寬） \times h （高）之矩形。梁 AB 的中點吊掛 6 kN 重物，其承受組合荷載（combined loading）且結構自重不計。請回答下列問題：
（每小題 10 分，共 30 分）

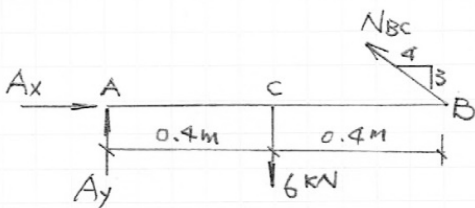
- (一)繪製梁 AB 的自由體圖，計算支撐點 A 的反力及桿件 BC 的軸力。
- (二)繪製梁 AB 的剪力分布圖及彎矩分布圖，並且計算吊掛重物處的剪力及彎矩。
- (三)梁 AB 吊掛重物處截面承受的最大壓應力、最大橫向剪應力及各別位置。



1. 《考題難易》★★：簡單
 2. 《破題關鍵》：
 *B 處銷接、C 支撐為銷支撐，所以 BC 桿件為二力桿，其軸內力沿桿件方向。
 *假設 b 、 h 其長度單位為 mm ，將應力的單位以 MPa 表示。

【擬答】

(一)梁 AB 的自由體圖，支撐點 A 的反力及桿件 BC 的軸力



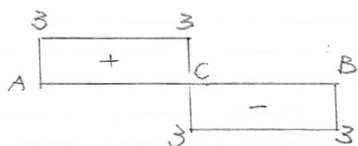
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y \times 0.8 - 6 \times 0.4 = 0 \Rightarrow A_y = 3 \cdot \text{kN}(\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + \frac{3}{5} N_{BC} - 6 = 0 \Rightarrow 3 + \frac{3}{5} N_{BC} - 6 = 0 \Rightarrow N_{BC} = 5 \cdot \text{kN}(\text{拉力})$$

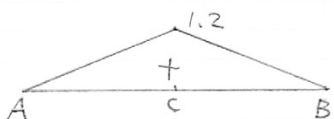
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - \frac{4}{5} N_{BC} = 0 \Rightarrow A_x - \frac{4}{5} \times 5 = 0 \Rightarrow A_x = 4 \cdot \text{kN}(\rightarrow)$$

公職王歷屆試題 (110 高考三級)

(二) 梁 AB 的剪力分布圖及彎矩分布圖，吊掛重物處(C 點)的剪力及彎矩



剪力圖(kN)



彎矩圖(kN-m)

$$V_{CL} = +3 \cdot \text{kN} \quad (\text{C 點左側剪力})$$

$$V_{CR} = -3 \cdot \text{kN} \quad (\text{C 點右側剪力})$$

$$M_C = +1.2 \cdot \text{kN} \cdot \text{m} \quad (\text{C 點彎矩})$$

(三) 梁吊掛重物處(C 點)截面承受的最大壓應力、最大橫向剪應力及各別位置
假設 b 及 h 的長度單位為 mm

1. C 點截面承受的最大壓應力發生在截面最上緣位置

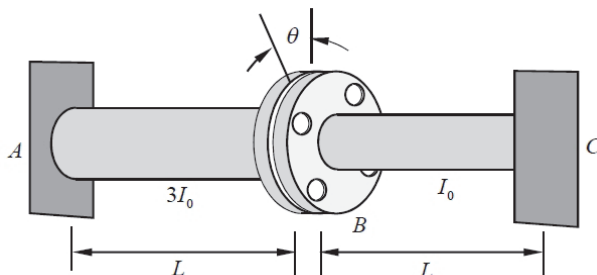
$$S_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$\sigma_{max}^- = \frac{M_C}{S_z} = \frac{1.2 \times 10^6}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{7.2}{bh^2} \times 10^6 \cdot \text{MPa}$$

2. C 點截面承受的最大橫向剪應力發生在截面中性軸(截面中央)位置

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \tau_{avg} = \frac{3V_C}{2A} = \frac{3 \times 3 \times 10^3}{2bh} = \frac{4.5}{bh} \times 10^3 \cdot \text{MPa}$$

二、如圖所示，末端固定於剛性牆的兩支等長圓柱構件 AB 及 BC，構件連結處 B 設有法蘭 (flanges)，兩者中心線對準。由於安裝誤差，兩法蘭的螺栓孔角度相差 θ 。組裝時施予扭轉荷載，將其對準栓接後，移除施加的荷載。兩圓柱構件具有相同的剪力模數 (shear modulus) G ，面積極慣性矩 (polar moment of inertia of area) 分別為 $3I_0$ 及 I_0 。試問兩圓柱構件組裝後的殘留扭矩 T 及法蘭的扭轉角 (angle of twist) φ 。(20 分)



1. 《考題難易》★★★：普通

2. 《破題關鍵》：

*組裝時的加載扭矩為未知，整個結構為靜不定結構。

*兩支構件在 B 點的變形相同，可利用彈簧類比 k 的應用的並聯系統，求得構件內力。

*兩支構件的相對扭轉角的和等於 θ 角。

【擬答】

設組裝時加載的預扭矩為 T_0 ，此扭矩使得 AB 桿產生相對扭轉角 φ_{AB} ，BC 桿產生相對扭轉角 φ_{BC}

$$\theta = \phi_{AB} + \phi_{BC} \cdots (1)$$

AB 及 BC 桿在 B 點有相同的扭轉角，因此各桿的內力與其扭轉勁度成正比。

$$k_{AB} : k_{BC} = \frac{G(3I_0)}{L} : \frac{GI_0}{L} = 3 : 1$$

$$T_{AB} = \frac{3}{3+1}T_0 = \frac{3}{4}T_0$$

$$T_{BC} = \frac{1}{3+1}T_0 = \frac{1}{4}T_0$$

$$\phi_{AB} = \frac{T_{AB}L}{G(3I_0)} = \frac{\frac{3}{4}T_0L}{3GI_0} = \frac{T_0L}{4GI_0}$$

$$\phi_{BC} = \frac{T_{BC}L}{G(I_0)} = \frac{\frac{1}{4}T_0L}{GI_0} = \frac{T_0L}{4GI_0}$$

$$\theta = \phi_{AB} + \phi_{BC} = \frac{T_0L}{4GI_0} + \frac{T_0L}{4GI_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2GI_0}{L}\theta$$

$$\therefore T_{AB} = \frac{3}{4}T_0 = \frac{3}{4} \frac{2GI_0}{L}\theta = \frac{3GI_0}{2L}\theta$$

$$\therefore T_{BC} = \frac{1}{4}T_0 = \frac{1}{4} \frac{2GI_0}{L}\theta = \frac{1GI_0}{2L}\theta$$

$$\varphi = \phi_{AB} = \frac{T_0L}{4GI_0} = \frac{2GI_0}{L}\theta \times \frac{L}{4GI_0} = \frac{1}{2}\theta$$

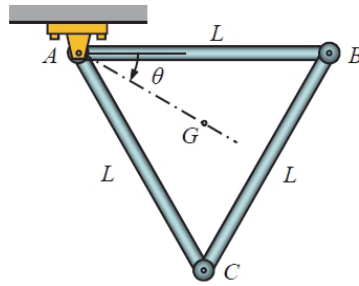
答：構件組裝後的殘留扭矩 $T_{AB} = \frac{3GI_0}{2L}\theta$ 及 $T_{BC} = \frac{1GI_0}{2L}\theta$

法蘭的扭轉角 $\varphi = \frac{1}{2}\theta$

三、如圖所示，一個正三角鐵平面與鉛垂面平行，頂點 A 懸掛於天花板上的銷支撐 (pin support)。三角鐵總質量為 m ，邊長為 L ，頂點 A 與質心 G 之連線的水平傾角為 θ 。將正三角鐵於 $\theta=30^\circ$ 處由靜止下釋放，繞頂點 A 旋轉。重力加速度以符號 g 表示。請回答下列問題：

(一) 正三角鐵相對 A 點的轉動慣量 (moment of inertia of mass) 值。(10 分)

(二) 當 $\theta=90^\circ$ 時，銷支撐 A 施予三角鐵的水平力及鉛垂力是多少？(15 分)



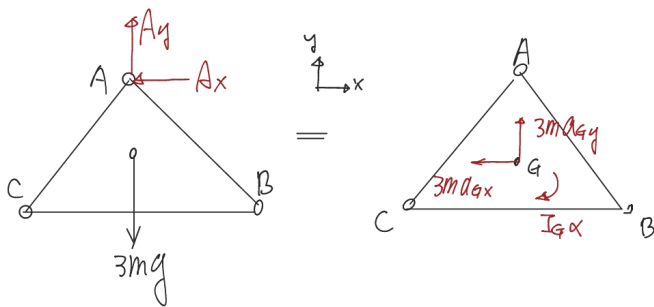
1. 《考題難易》★★★：普通
2. 《破題關鍵》： $\Sigma M = I \alpha$

【擬答】

(一) 計算質量慣性矩

$$I_A = \frac{1}{3} mL^2 \times 2 + \left[\frac{1}{12} mL^2 + m \left(\frac{\sqrt{3}}{2} L \right)^2 \right] = \frac{3}{2} mL^2$$

(二)



1. $\Sigma M_A = I_A \alpha \Rightarrow \Sigma M_A = 0 \therefore \alpha = 0$ (力通過支點，不生力矩)

2. $\Sigma F_x = m a_{Gx} \Rightarrow A_x = 3m \left(\frac{\sqrt{3}}{3} L \right) \alpha = 0 (\because \alpha = 0)$答(二)-1

3. $\Sigma F_y = m a_{Gy} \Rightarrow A_y - 3mg = 3m \left(\frac{\sqrt{3}}{3} L \right) \omega^2 \Rightarrow A_y = 5mg(\uparrow)$答(二)-2

其中力學能守恆

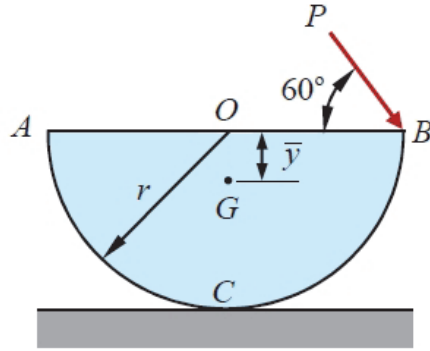
$$3mg \left(\frac{\sqrt{3}}{3} L \right) (1 - \sin 30) = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2\sqrt{3}g}{3L}$$

公職王歷屆試題 (110 高考三級)

四、如圖所示，一個均質半圓柱靜置於水平地面，質量為 m ，半徑為 r 。已知半圓柱的質心 G 與圓心 O 距離 $\bar{y} = 4r / (3\pi)$ ，相對圓心 O 的轉動慣量 (moment of inertia of mass) 為 $I = mr^2 / 2$ ，重力加速度以符號 g 表示。施一傾斜力 P 於 B 點，使半圓柱開始轉動而不滑動 (roll without sliding)。請回答下列問題：

- (一)繪製半圓柱於初始瞬間的自由體圖及動力圖 (kinetic diagram)。(5 分)
- (二)半圓柱於初始瞬間的角加速度 α ?(10 分)
- (三)半圓柱與地面至少需要的最大靜摩擦係數? (10 分)



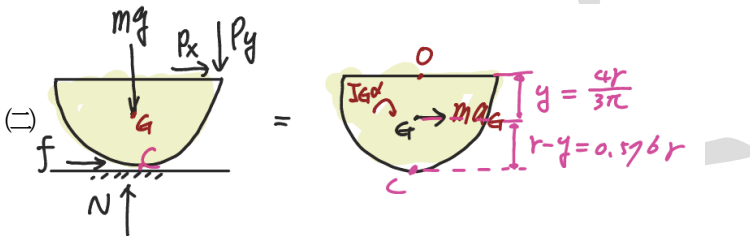
1. 《考題難易》★★★★：困難
2. 《破題關鍵》： $\Sigma M = I\alpha$

【擬答】

(一)半圓柱 $I_O = \frac{1}{2} + mr^2$

$I_O = I_G + my^2$

$\Rightarrow I_G = I_O - m\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 = 0.32mr^2$



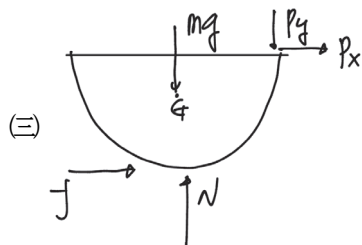
其中 $a_G = (0.576r)\alpha$

$\Sigma Mc = (\Sigma Mc)_{eff} (+\curvearrowright)$

$P_x r + P_y r = I_G \alpha + ma_G \cdot (0.576r)$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) pr = 0.32mr^2 \cdot \alpha + m(0.576)^2 r^2 \alpha$

$\Rightarrow 1.37pr = mr^2(0.32\alpha + 0.33\alpha) \Rightarrow$ 解得 $\alpha = 2.11 \frac{P}{mr} (\curvearrowright)$



$$1. \Sigma F_y = m(a_G)_y$$

$$\Rightarrow N = P_y + mg = \frac{\sqrt{3}}{2}P + mg = 0.87P + mg$$

$$2. \Sigma F_x = ma_{Gx}$$

$$P_x + f = m(0.576r\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}P + \mu N = m(0.576r\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}P + \mu(0.87P + mg) = m\left(0.576r \times 2.11 \frac{P}{mr}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}P + \mu(0.87P + mg) = 1.21P$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{0.71P}{0.87P + mg}$$