

110 年公務人員高等考試三級考試試題

等 別：三等考試

類 科：統計

科 目：抽樣方法

王瑋老師

甲、申論題部分：

95%信心水準請利用 $Z_{0.025}=1.96$ 計算

一、某人欲研析某地區街貓數目，將該地區劃分為四等份並編號 $i=1, 2, 3, 4$ 如下：

1	2
3	4

而其所採之抽樣設計分兩階段進行如下：

(1) 首先隨機選擇一個區域並觀察該區域街貓數目 (y_i)。

(2) 若 $y_i > 10$ ，則繼續觀察其相鄰之兩個區域作為樣本區域，否則若 $y_i \leq 10$ ，則隨機選擇剩下未觀察之三個區域中的其中一個區域作為樣本區域。

例如若第1個區域在第(1)階段被選，且 $y_i \leq 10$ ，則在其他第2, 3, 4等三個區域中再隨機選擇一個區域觀察，若 $y_i > 10$ ，則繼續觀察第2及3個區域。注意：第1及第4個區域不相鄰，同理第2及第3個區域不相鄰。

今假設該地區街貓實際分布如下：

$y_1 = 7$	$y_2 = 13$
$y_3 = 19$	$y_4 = 1$

請根據此抽樣設計及母體，回答下列問題：(每小題5分，共20分)

(一) 若不考慮樣本出現順序，樣本組合為 $s = (2, 3)$ 之機率為何？

(二) 第4個區域之抽樣包含機率 (inclusion probability) ？

(三) 若以觀察值之平均值，記為 \bar{y} ，為母體平均之估計量，請問 \bar{y} 之偏誤 (bias) 為何？

(四) 請問 \bar{y} 之均方誤差 (mean square error) 為何？

志光 × 保成 × 學儒 高普考 · 地方特考

奪榜特訓班

完整規劃 嚴格執行 **快速考取**

就是要找有上榜決心的您

十大課程特色	集中管理	固定劃位	按表操課
	全面檢視	三大會考	申論指導
	專屬課輔	弱科加強	佳作觀摩

奪榜特訓班讓我快速進入考試的狀態

鄭○賢 一年考取

109 普考 經建行政 狀元
109 高考 經建行政 殊花

參加奪榜/特訓班的優勢是可以於考前幾個月逼自己進入備戰狀態，密集且快速把前面上課的內容完整複習，並且每天固定要在表定時間內寫完題目，加上眾人聚在一起凝聚出考前衝刺的氛圍，讓自己更能專注、不懈怠。

■ 完整課程資訊詳洽全國志光 · 保成 · 學儒門市 ■

《考題難易》★★★★☆☆

《解題關鍵》此題為適應性抽樣(adaptive sampling)，本屬課外內容，但同學未必需要理解何謂適應性抽樣，僅需針對題意進行窮舉所有的可能樣本，仍可得到抽樣分配，進而推算偏誤與均方誤。雖然過去考試未曾命題，但特殊的抽樣分配是近年考題重要題型，108 年地特、107 高考、104 年地特皆有抽樣分配命題，可參考王瑋 抽樣方法 P.2-26 至 P.2-31 頁類似試題演練。

【擬答】

(一) 第 1 階段抽到#1，第 2 階段可抽到#2,#3,#4：

地區	(1,2)	(1,3)	(1,4)
\bar{y}	10	13	4
$f(\bar{y})$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

第 1 階段抽到#2，第 2 階段可抽到#1,#4：

地區	(2,1)	(2,4)
\bar{y}	10	7
$f(\bar{y})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

第 1 階段抽到#3，第 2 階段可抽到#1,#4：

地區	(3,1)	(3,4)
\bar{y}	13	10
$f(\bar{y})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

第 1 階段抽到#4，第 2 階段可抽到#1,#2,#3：

地區	(4,1)	(4,2)	(4,3)
\bar{y}	4	7	10

$f(\bar{y})$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
--------------	----------------	----------------	----------------

所以樣本組合 $s=(2,3)$ 的機率為 0

(二) 由(一)可知，包含#1 的機率為 $\pi_1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

包含#2 的機率為 $\pi_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$

#3 的機率為 $\pi_3 = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$

#4 的機率為 $\pi_4 = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

(三) \bar{y} 抽樣分配整理如下:

\bar{y}	4	7	10	13
$f(\bar{y})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{24}$

$E(\bar{y}) = 4 \times \frac{1}{6} + 7 \times \frac{5}{24} + 10 \times \frac{5}{12} + 13 \times \frac{5}{24} = 9 \neq \mu$ 為有偏估計式

其中 $\mu = \frac{7+13+19+1}{4} = 10$

$bias(\bar{y}) = 9 - 10 = -1$

(四) $E(\bar{y}^2) = 4^2 \times \frac{1}{6} + 7^2 \times \frac{5}{24} + 10^2 \times \frac{5}{12} + 13^2 \times \frac{5}{24} = 89.75$

$Var(\bar{y}) = E(\bar{y}^2) - (E(\bar{y}))^2 = 89.75 - 9^2 = 8.75$

$MSE(\bar{y}) = bias^2 + Var(\bar{y}) = (-1)^2 + 8.75 = 9.75$

志光 · 保成 · 學儒

財稅行政

商科人 入主公職首選

黃金投考組合 公職+證照 一次搞定

110.10.30~10.31 調查局-財經組	110.11.20~11.22 記帳士證照	110.12.11~12.13 地特-財稅	111.1.8 初等-財稅	111.4.23~4.24 關務-財稅	111.7.15~7.19 高普考-財稅
----------------------------	--------------------------	--------------------------	------------------	------------------------	-------------------------

雙料金榜 林○儒 109 高普考財稅行政

我是個喜歡問問題與老師對談的學生，上面授課讓我能夠跟老師們對談，只要不會的部份，老師都會很有耐心地重新講一遍，讓我可以理解那些專業觀念。老師總是告訴我們要多練習申論題，我謹記在心，都會按時給老師申論題批閱，這樣的練習幫助我拉高很多分數。

優異考取 戴○紘 109 普考財稅行政

當初報名的是面授考取班，原因是若能一年考取當然最好，若無法的話也能在隔年繼續努力或者是讓自己休息一年後再繼續奮鬥。而上面授班除了能夠與老師互動外，也能有機會認識班上同學，大家彼此幫忙、彼此鼓勵，一起朝著目標前進是我認為非常重要的。

■ 完整課程訊息請洽志光 · 保成 · 學儒全國門市 ■

公職王歷屆試題 (110 高考三等)

二、某人於康寧鄉進行一項有關 110 年 6 月農牧業從業戶之生產成本及收入調查，該鄉共有 3 戶養豬場，10 戶養雞場，農業從業戶之戶數不詳，但由航空測量之空照圖可判明康寧鄉之農地面積為 300 公頃，而根據公務資料，康寧鄉 6 月之雞隻在養隻數為 10,000 隻。

其抽樣設計如下：養豬場全選，養雞場及農業戶則分別以簡單隨機抽樣取出不放回之方式各選擇 4 戶養雞場及 10 戶農業戶，調查所得資料如下：

養豬場：

6 月平均在養豬頭數	500	750	200
6 月生產成本 (萬元)	300	450	150

養雞場：

6 月平均在養雞隻數	500	1500	300	200
6 月生產成本 (萬元)	35	120	15	30

農業戶

耕地面積 (公頃)	2	0.5	5	1	0.3	2	1.2	3	1	4
6 月生產成本 (萬元)	2	6	6	1	5	5	2	3	5	5

請回答下列問題：

- (一)請以您認為合適的估計量推估康寧鄉養雞場平均 6 月每場之生產成本以及其 95%信賴區間，並說明使用該估計量之理由，並據以計算如果下年度想針對康寧鄉的養雞場再執行一次生產成本調查以推估該年度 6 月平均每場生產成本，並希望能將 95%最大抽樣誤差控制在 6 萬元以內，請問所需最小樣本數為何？(15 分)
- (二)請問康寧鄉畜牧戶從業戶 6 月平均每場之生產成本以及其 95%信賴區間為何？(10 分)
- (三)請以您認為合適的估計量推估康寧鄉 6 月總生產成本以及其 95%信賴區間，並說明使用該估計量之理由。(10 分)
- (四)請問康寧鄉 6 月農牧業總生產成本以及其 95%信賴區間為何？(5 分)

《考題難易》★★★★★

《解題關鍵》本群集抽樣雖不屬課外，但要聯想到此算法並不容易，雖然題(一)是群集隨機抽樣的基本題，但須注意題目要問的是平均每場生產成本，而非平均每隻雞的生產成本；題(二)(三)(四)是 108 年高考類似的二階段抽樣的沿伸題，可參考黃文隆抽樣方法 P.6-15 頁有相同範例，以及王瑋 抽樣方法總複習教材亦有相同例題。

【擬答】

$$(一) 1. \bar{y}_t = \frac{35 + 120 + 15 + 30}{4} = 50$$

$$s_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y}_t)^2}{n-1} = 2250$$

$$s_{\bar{y}_t} = \sqrt{(1-f) \frac{s_t^2}{n}} = \sqrt{(1-\frac{4}{10}) \frac{2250}{4}} = 18.3712$$

每場平均生產成本之 95%信賴區間為

$$\bar{y}_t \pm Z \cdot s_{\bar{y}_t} \Rightarrow 50 \pm 1.96 \times 18.3712$$

$$\Rightarrow (13.9925, 86.0075)$$

$$2. n_0 = \frac{Z^2 s_t^2}{B^2} = \frac{1.96^2 \times 2250}{6^2} = 240.1 \approx 241$$

$$n = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{N}} = \frac{241}{1 + \frac{241}{10}} = 9.6$$

n 取 10，所以在誤差 6 萬以內，幾乎需要普查

(二) 先利用兩階段群集抽樣估計總成本

$$\hat{Y}_2 = \sum_{i=1}^3 y_i + \frac{10}{4} \sum_{i=4}^7 y_i = (300 + 450 + 150) + 10 \times 50 = 1400$$

所以總計 3 戶養豬場與 10 戶養雞場平均每場生產成本為

$$\bar{Y}_2 = \frac{\hat{Y}_2}{13} = \frac{1400}{13} = 107.6923$$

第一階段抽樣單位是畜牧戶的類型，第二階段抽樣單位則是從業戶。

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{Y}_2) &= N^2(1-f_1) \frac{S_{1b}^2}{n} + \frac{N}{n} \sum M_i^2(1-f_{2i}) \frac{S_{2i}^2}{m_i} \\ &= 2^2 \left(1 - \frac{2}{2}\right) \frac{S_{1b}^2}{2} + \frac{2}{2} \left(3^2 \left(1 - \frac{3}{3}\right) \frac{S_{21}^2}{3} + 10^2 \left(1 - \frac{4}{10}\right) \frac{S_{22}^2}{4}\right) \\ &= 10^2 \left(1 - \frac{4}{10}\right) \frac{S_{22}^2}{4} \end{aligned}$$

其中 S_{21}^2 為養豬場生產成本變異數， S_{22}^2 為養雞場生產成本變異數。

根據養雞場樣本 $s_{22}^2 = s_i^2 = 2250$

$$\text{所以 } s_{\bar{Y}_2} = \frac{1}{13} \sqrt{10^2 \left(1 - \frac{4}{10}\right) \frac{2250}{4}} = 13.1317$$

畜牧從業戶平均每場生產成本 95% 近似信賴區間為
 $107.6923 \pm 1.96 \times 13.1317 \Rightarrow (79.9942, 135.3904)$

(三) 同樣採用兩階段群集抽樣估計總成本，

第一階段抽樣單位是農牧業的類型，第二階段抽樣單位則是從業戶。

$$\hat{Y}_2 = \sum_{i=1}^3 y_i + \frac{10}{4} \sum_{i=4}^7 y_i + \frac{150}{10} \sum_{i=8}^{17} y_i$$

其中以平均耕地面積 $\bar{m} = 2$ 估算可抽樣單位數為 150

$$\text{Var}(\hat{Y}_2) = N^2(1-f_1) \frac{S_{1b}^2}{n} + \frac{N}{n} \sum M_i^2(1-f_{2i}) \frac{S_{2i}^2}{m_i}$$

其中 S_{21}^2 為養豬場生產成本變異數， S_{22}^2 為養雞場生產成本變異數，
 S_{23}^2 為農業戶生產成本變異數。

農牧業總生產成本 95% 近似信賴區間為

$$\hat{Y}_2 \pm Z_{0.025} \times s_{\hat{Y}_2}$$

$$(四) \hat{Y}_2 = \sum_{i=1}^3 y_i + \frac{10}{4} \sum_{i=4}^7 y_i + \frac{150}{10} \sum_{i=8}^{17} y_i$$

$$= (300 + 450 + 150) + 10 \times 50 + 150 \times 4 = 2000$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{Y}_2) &= N^2(1-f_1) \frac{S_{1b}^2}{n} + \frac{N}{n} \sum M_i^2(1-f_{2i}) \frac{S_{2i}^2}{m_i} \\ &= \frac{3}{3} \left(3^2 \left(1 - \frac{3}{3}\right) \frac{S_{21}^2}{3} + 10^2 \left(1 - \frac{4}{10}\right) \frac{S_{22}^2}{4} + 150^2 \left(1 - \frac{10}{150}\right) \frac{S_{23}^2}{10}\right) \end{aligned}$$

$$= 10^2 \left(1 - \frac{4}{10}\right) \frac{2250}{4} + 150^2 \left(1 - \frac{10}{150}\right) \frac{3.3333}{10} = 40750$$

$$= 10^2 \left(1 - \frac{4}{10}\right) \frac{2250}{4} + 150^2 \left(1 - \frac{10}{150}\right) \frac{3.3333}{10} = 40750$$

農牧業總生產成本 95% 近似信賴區間為

$$2000 \pm 1.96 \times \sqrt{40750} \Rightarrow (1604.3421, 2395.6579)$$

志光 × 保成 × 學儒

高普考 111 年金榜輔考課程

基礎課 基礎架構課程協助考生建立基礎，以簡易的體系架構，理解各類科法令大綱，有助日後各類科學習。	正規課 開課時間依照各科目學習關聯性作安排，由淺入深教學、循序漸進的授課模式，讓同學完整學習、快速考取。	專題課 考前要拿高分除了理論內容熟記外，在答題上再加入新的時事見解，藉此提高分數，增加上榜機會。
題庫班 以題目帶觀念方式授課，將題目進行整合連貫的剖析，強化同學做答技巧的提升！達到學一反三之效。【自費加選】	奪榜班/特訓班 成績診斷分析→複習計劃擬定→隨堂小考檢視一弱科加強課程→駐班輔導老師一全真模擬考試。【自費加選】	總複習 考前關鍵時刻，由授課老師精心篩選並分析考前重要考點補充，以地毯式重點整理給各位同學。

吳○儀 109 高考金融保險 全國第九名

我選擇面授課程上課，因為可以直接面對老師，讓我比較專心，而且事後遇到問題，也可以在下課時候問老師。我有參加題庫班，可以在考前加強複習，尤其是會計，老師會收集各種考題，對考試非常有幫助。

■ 完整課程資訊詳洽全國志光·保成·學儒門市 ■

- 三、龍江大學企業管理學系規劃於系館增設一性別友善廁所，事前先行對全系學生進行意願調查，調查方式是以簡單隨機抽樣取出不放回的方式於全系 240 位學生（其中有 200 位女學生及 40 位男學生）中，選擇 60 位學生作為調查樣本，並詢問其對增設性別友善廁所之意見。
- 於 60 位樣本學生中，共有 24 位學生表示贊成。而 60 位樣本學生中有 30 位男同學，30 位女同學，男同學中有 6 位表示贊成，女同學中則有 18 位表示贊成。（每小題 10 分，共 20 分）
- (一)請以您認為合適的估計量推估龍江大學企業管理學系學生贊成增設性別友善廁所之比例及其 95% 信賴區間，並說明採用此一估計量之理由。
- (二)會計學系也想參考企業管理學系的經驗，規劃設立性別友善廁所並先對學生意見進行調查。系主任計劃分別由女同學及男同學中各以簡單隨機抽樣取出不放回的方式選擇若干同學，總計希望能由會計學系的 250 位學生中選擇 100 位學生作為調查樣本。因為會計學系男女生比例為 4:6，因此系主任規劃男學生之樣本數為 40，而女學生之樣本數為 60。請問您是否認同此一様本數配置，請說明您的理由，同時如果您不認同，請提出您認為較適當的樣本數配置。

《考題難易》★★☆☆☆

《解題關鍵》須從題意看出來是進行簡單隨機抽樣的程序，所以本題是事後分層抽樣，而非分層隨機抽樣。事後分層的概念在 107 年高考、105 年高考曾經命題，而相關的計算題則是出在 108 年薦任與 102 年關務，可見近年來非常重視。可參考王瑋 抽樣方法 P.3-47 至 P.3-52 頁相同例題演練。

【擬答】

(一) 由簡單隨機抽樣 60 位樣本後，再觀察其分層進行加權估算，此為事後分層抽樣。此處採用事後分層而沒有採用分層隨機抽樣的原因是事後分層的程序較分層隨機抽樣來的簡易，且樣本數夠大的情況下，兩者精確度差異不大。

$$p_{pst} = \sum_{h=1}^L A_h p_h = \frac{200}{240} \times \frac{6}{30} + \frac{40}{240} \times \frac{18}{30} = 0.2667$$

$$s_{p_{pst}} = \sqrt{\left(\frac{N-n}{Nn}\right) \sum_{i=1}^L A_h \cdot s_h^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^L (1-A_h) \cdot s_h^2}$$

$$= \sqrt{\frac{240-60}{240 \times 60} \left(\frac{200}{240} \times \frac{30 \times 0.2 \times 0.8}{29} + \frac{40}{240} \times \frac{30 \times 0.6 \times 0.4}{29} \right) + \frac{1}{60^2} \left(\frac{40}{240} \times \frac{30 \times 0.2 \times 0.8}{29} + \frac{200}{240} \times \frac{30 \times 0.6 \times 0.4}{29} \right)}$$

$$= \sqrt{0.0022414 + 0.0000651} = 0.048$$

所以企管系學生贊成增設性別友善廁所比例之 95% 信賴區間為

$$p_{pst} \pm Z_{0.025} \cdot s_{p_{pst}}$$

$$\Rightarrow (0.2667 \pm 1.96 \times 0.048) \Rightarrow (0.1725, 0.3608)$$

(二) 此抽樣方法為分層隨機抽樣，自男女生按性別比例分別抽取樣本，即採比例配置，

$$n_h = \frac{N_h}{\sum_{h=1}^L N_h} \times n$$

。因為性別友善廁所的認同度看法應具有性別上的差異，所以以性別進行抽樣屬合適。而估計的是比例值，可採用紐門配置，

$$n_h = \frac{N_h S_h}{\sum_{h=1}^L N_h S_h} \times n$$

，可獲得更精確的結果。

四、為推估三民市內之便利商店每日營業額以作為評估是否應該投入經營便利商店之參考，某人在三民市內總數為 50 間的便利商店中，以簡單隨機抽樣取出不放回的方式選擇了 10 間便利商店，並詢問其店長當日該店預估之營業額，同時並提供 200 元之禮券以答謝店長之合作。調查所得資料中，10 間樣本便利商店之日營業額資料如下：（樣本平均為 6 萬元，樣本變異數為 2.67（萬元）²）

商店編號	1	5	6	14	17	21	32	42	43	45
日營業額 (萬元)	5	3	6	6	6	7	8	4	7	8

某人又由上表的 10 間商店中，以簡單隨機抽樣取出不放回的方式選擇其中 5 間，請店長提供其當日營業報表之總結摘要，以記錄其實際日營業額，同時又額外提供 1000 元禮券給這 5 位店長作為答謝。其資料如下：

商店編號	5	17	21	32	42
報表摘要日營業額 (萬元)	5	9	9	11	8

請回答下列問題：（每小題 10 分，共 20 分）

(一) 請以適當之方式推估三民市之便利商店之平均日營業額及其 95% 信賴區間。

(二) 在這次調查中總共花費了 7,000 元購買禮券，請問若想再執行一次抽樣設計相同之調查，

但將購買禮券之預算增加為 8,000 元，請問直接詢問店長日營業額及查閱營業報表之樣本數應如何配置為宜？

《考題難易》★★★★☆

《解題關鍵》雙重抽樣是課內會上到的內容，但因為過去較少命題，僅在 100 年身障曾經命題，所以對於同學而言相關的計算熟練度較弱。而雙重抽樣樣本數的配置證明則早在 85 年高考即出過，但因為未曾考過計算題，所以本題的難度較高，未來需習慣這樣的出題模式。可參考王瑋 抽樣方法 P.10-22 與 P.10-24 頁相同例題演練。

【擬答】

- (一) 本題為雙重抽樣，以日營業額為輔助變數 x ，報表摘要日營業額 y ，第二重樣本整理如下：

編號	5	17	21	32	42
x	3	6	7	8	4
y	5	9	9	11	8

計算相關的統計量：

$$\text{第一重：}\bar{x}' = \frac{5 + \dots + 6}{10} = 6$$

$$\text{第二重：}\sum x = 28, \sum y = 42, \sum x^2 = 174, \sum y^2 = 372, \sum xy = 252$$

採比率雙重估計

$$\bar{y}_r = r\bar{x}' = \frac{\sum y}{\sum x} \bar{x}' = \frac{42}{28} \times 6 = 9 \quad (\text{萬元})$$

$$s_d^2 = \frac{\sum y^2 - 2r \cdot \sum xy + r^2 \sum x^2}{n-1} = \frac{372 - 2 \times 1.5 \times 252 + 1.5^2 \times 174}{5-1} = 1.875$$

$$s_{\bar{y}_r} = \sqrt{\frac{s_d^2}{n} + \frac{s_y^2 - s_d^2}{n'} - \frac{s_y^2}{N}} = \sqrt{\frac{1.875}{5} + \frac{4.8 - 1.875}{10} - \frac{4.8}{50}} = 0.756$$

便利超商日營業額平均值之 95% 近似信賴區間為

$$9 \pm 1.96 \times 0.756 \Rightarrow (7.5183, 10.4817)$$

- (二) 總花費 $C = 8000$ ，第一重成本 $c_n' = 200$ ，第二重成本 $c_n = 1000$

$$\text{第一重變異數 } V_n' = s_y^2 - s_d^2 = 2.925, \text{ 第二重 } V_n = s_d^2 = 1.875$$

$$\text{第一重樣本大小為 } n' = \frac{C\sqrt{V_n'}}{\sqrt{c_n'(\sqrt{c_n'V_n} + \sqrt{c_n'V_n'})}} = \frac{8000 \times \sqrt{2.925}}{\sqrt{200(\sqrt{1000 \times 1.875} + \sqrt{200 \times 2.925})}} = 14.3$$

第二重樣本大小為

$$n = \frac{C\sqrt{V_n}}{\sqrt{c_n(\sqrt{c_n'V_n} + c_n'\sqrt{c_n'V_n'})}} = \frac{8000 \times \sqrt{1.875}}{\sqrt{1000(\sqrt{1000 \times 1.875} + \sqrt{200 \times 2.925})}} = 5.1$$

可考慮直接詢問 15 間店長日營業額，以及查閱營業報表 5 間

$$\text{總花費 } C = 15 \times 200 + 5 \times 1000 = 8000$$