

110年公務人員普通考試試題

等別：四等考試

類科：土木工程、測量製圖

科目：測量學概要

一、在一個Y形網中，按同一等級直接水準測量分別由三個水準路線觀測得到結點P之高程成果如下表所示，試求P點高程之最或然值及其中誤差。(25分)

路線	P點之高程	路線長
1	63.640m	6.0km
2	63.655m	5.0km
3	63.676m	4.0km

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：Y形水準網。重點提要：權與路線長成反比。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2021 年版)

作者：賴明

章節出處：第三章 水準測量 之 九、直接水準測量之誤差限制及平差計算

【擬答】：

假設：P點高程之最或然值= H ，且

路線	P點之高程	路線長
1	$H_1=63.640\text{ m}$	$L_1=6.0\text{ km}$
2	$H_2=63.655\text{ m}$	$L_2=5.0\text{ km}$
3	$H_3=63.676\text{ m}$	$L_3=4.0\text{ km}$

(一)計算各路線的權重

$$\because P \propto \frac{1}{L}, P_1:P_2:P_3 = \frac{1}{L_1}:\frac{1}{L_2}:\frac{1}{L_3} = \frac{1}{6}:\frac{1}{5}:\frac{1}{4} = \frac{60}{6}:\frac{60}{5}:\frac{60}{4} = 10:12:15$$

$$\text{權重之和 } [P] = P_1 + P_2 + P_3 = 10 + 12 + 15 = 37$$

(二)計算P點高程之最或然值 H

$$[PH] = P_1H_1 + P_2H_2 + P_3H_3$$

$$[PH] = 10 \times 63.640 + 12 \times 63.655 + 15 \times 63.676 = 2355.4$$

$$H = \frac{[PH]}{[P]} = \frac{2355.4}{37} = 63.659\text{m}$$

(三)計算P點高程之最或然值中誤差 σ

$$v_1 = 63.640 - 63.659 = -0.019, v_2 = 63.655 - 63.659 = -0.004, v_3 = 63.676 - 63.659 = 0.017$$

$$[Pvv] = P_1v_1^2 + P_2v_2^2 + P_3v_3^2$$

$$[Pvv] = 10 \times (-0.019)^2 + 12 \times (-0.004)^2 + 15 \times 0.017^2 = 8.137 \times 10^{-3}$$

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{[Pvv]}{[P] \times (n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{8.137 \times 10^{-3}}{37 \times (3-1)}} = \pm 0.010\text{m}$$

P點高程之最或然值及其中誤差= $63.659\text{m} \pm 0.010\text{m}$

二、試說明對向交互水準測量作業程序、應用時機與可消除那些誤差的影響。(25分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：對向水準測量。重點提要：作業程序、應用時機與消除誤差。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2021 年版)

作者：賴明

章節出處：第三章 水準測量 之 七、渡河水準測量 (對向高程測量)

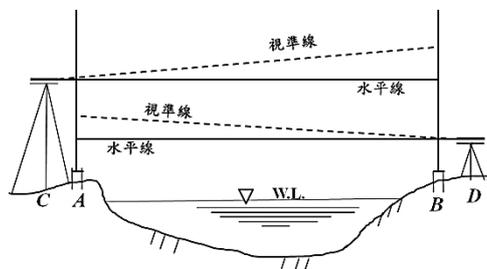
【擬答】：

(一)對向交互水準測量作業程序

1. 如圖，於河兩岸 A, B 置水準尺，C, D 架設水準儀，須使得 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 。

2. 於 C, D 分別讀出 A, B 水準尺之讀數，得 b_1, f_1 及 b_2, f_2

3. $\Delta h = H_B - H_A = \frac{1}{2}[(b_1 - f_1) + (b_2 - f_2)]$ = 兩次觀測高程差之平均值。



(二)應用時機

水準儀與前視、後視水準尺之距離相差甚大時，可應用對向水準測量。

例如：渡河水準測量

(三)可消除的誤差影響

可消除：視準軸誤差，地球曲率差，大氣折光差。

兩差：地球曲率差 $C_E = \frac{S^2}{2R}$ ，大氣折光差 $C_R = -k \frac{S^2}{2R}$ ， $C_{E-R} = C_E + C_R = (1-k) \frac{S^2}{2R}$

式中；R：地球曲率半徑。R=6371 km。

S：二點間水平距(km)。k：大氣折光係數(k=0.13)。

三、如示意圖所示，AE間為茂密樹林無法通視，應用開放導線分別於A、B、C、D及E設站觀測導線之水平距離與右旋角如下表。若已知測站A點平面坐標(E_A, N_A) = (5000.00, 5000.00)且後視A→N之方位解為 $5^\circ 11' 40''$ ，試計算E點平面坐標(E_E, N_E)及A→E方位角。(25分)

測站	水平距離(m)	右旋角	示意圖
A		$115^\circ 18' 20''$	
B	1,007.60	$161^\circ 24' 10''$	
C	567.66	$204^\circ 50' 5''$	
D	582.24	$273^\circ 46' 40''$	
E	1,829.36		

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：開放導線的坐標計算。

重點提要：開放導線不需要進行角度平差與縱、橫距平差。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2021 年版)

作者：賴明

章節出處：第五章 導線測量 之 第2節 導線計算

【擬答】：

- 已知：1. 開放導線，因此，不需要進行角度平差與縱、橫距平差
 2. A 點平面坐標 $(E_A, N_A) = (5000.00, 5000.00)$
 3. A→N 之方位角為 $5^\circ 11' 40''$ ， $\phi_{AN} = 5^\circ 11' 40''$

(一) 計算各邊方位角

$$\begin{aligned}\phi_{AB} &= \phi_{AN} + 115^\circ 18' 20'' = 5^\circ 11' 40'' + 115^\circ 18' 20'' = 120^\circ 30' 00'' \\ \phi_{BC} &= (\phi_{AB} + 180^\circ) + 161^\circ 24' 10'' = 120^\circ 30' 00'' + 180^\circ + 161^\circ 24' 10'' - 360^\circ = 101^\circ 54' 10'' \\ \phi_{CD} &= (\phi_{BC} + 180^\circ) + 204^\circ 50' 05'' = 101^\circ 54' 10'' + 180^\circ + 204^\circ 50' 05'' - 360^\circ = 126^\circ 44' 15'' \\ \phi_{DE} &= (\phi_{CD} + 180^\circ) + 273^\circ 46' 40'' = 126^\circ 44' 15'' + 180^\circ + 273^\circ 46' 40'' - 360^\circ = 220^\circ 30' 55''\end{aligned}$$

(二) 計算各點平面坐標

$$\begin{aligned}E_B &= E_A + \overline{AB} \cdot \sin \phi_{AB} = 5000.00 + 1007.60 \times \sin 120^\circ 30' 00'' = 5868.1775m \\ N_B &= N_A + \overline{AB} \cdot \cos \phi_{AB} = 5000.00 + 1007.60 \times \cos 120^\circ 30' 00'' = 4488.6043m \\ E_C &= E_B + \overline{BC} \cdot \sin \phi_{BC} = 5868.1775 + 567.66 \times \sin 101^\circ 54' 10'' = 6423.6322m \\ N_C &= N_B + \overline{BC} \cdot \cos \phi_{BC} = 4488.6043 + 567.66 \times \cos 101^\circ 54' 10'' = 4371.5235m \\ E_D &= E_C + \overline{CD} \cdot \sin \phi_{CD} = 6423.6322 + 582.24 \times \sin 126^\circ 44' 15'' = 6890.2302m \\ N_D &= N_C + \overline{CD} \cdot \cos \phi_{CD} = 4371.5235 + 582.24 \times \sin 126^\circ 44' 15'' = 4023.2568m \\ E_E &= E_D + \overline{DE} \cdot \sin \phi_{DE} = 6890.2302 + 1829.36 \times \sin 220^\circ 30' 55'' = 5701.785m \\ N_E &= N_D + \overline{DE} \cdot \cos \phi_{DE} = 4023.2568 + 1829.36 \times \cos 220^\circ 30' 55'' = 2632.5174m\end{aligned}$$

\therefore E 點平面坐標 $(E_E, N_E) = (5701.785m, 2632.517m)$

(三) 計算 A→E 方位角

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_E - E_A = 5701.785 - 5000.00 = 701.785m > 0 \\ \Delta N &= N_E - N_A = 2632.517 - 5000.00 = -2367.483m < 0 \quad \text{第 II 象限} \\ \theta &= \tan^{-1} \left| \frac{\Delta E}{\Delta N} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{701.785}{-2367.483} \right| = 16^\circ 30' 40'' \\ \phi_{AE} &= 180^\circ - \theta = 180^\circ - 16^\circ 30' 40'' = 163^\circ 29' 20''\end{aligned}$$

四、若以 n 種不同精度之經緯儀測量同一個水平角之觀測量(Observations)及其權重分別以 $L_i, p_i, i=1, 2, \dots, n$ 表示，試計算觀測量最或是值、剩餘誤差、平均誤差、單位權中誤差及觀測量最或是值中誤差。(25分)

【解題關鍵】

- 《考題難易》★★
- 《破題關鍵》關鍵字：觀測量及其權重。最或是值、剩餘誤差、平均誤差、單位權中誤差及最或是值中誤差

重點提要：加權平均。平均誤差為剩餘誤差絕對值之算術平均值。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2021 年版)

作者：賴明

章節出處：第一章 測量概論 之 第 3 節 測量誤差、精度與數據處理。

【擬答】：

已知：水平角之觀測量為 L_i ，相對的權重為 p_i ， $i=1, 2, \dots, n$

(一) 計算觀測量最或是值

$$\text{權重之和 } [p] = p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad [pL] = p_1 L_1 + p_2 L_2 + \dots + p_n L_n$$

$$\text{觀測量最或是值 } \bar{L} = \frac{[pL]}{[p]} = \frac{p_1L_1 + p_2L_2 + \cdots + p_nL_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

(二) 計算剩餘誤差 v_i

$$v_1 = L_1 - \bar{L}, v_2 = L_2 - \bar{L}, \dots, v_n = L_n - \bar{L}$$

(三) 計算平均誤差 t

平均誤差為剩餘誤差絕對值之算術平均值

$$t = \frac{[p \cdot |v|]}{[p]} = \frac{1}{[p]} (p_1 \cdot |v_1| + p_2 \cdot |v_2| + \cdots + p_n \cdot |v_n|),$$

$$t = \frac{1}{[p]} (p_1 \cdot |L_1 - \bar{L}| + p_2 \cdot |L_2 - \bar{L}| + \cdots + p_n \cdot |L_n - \bar{L}|)$$

(四) 計算單位權中誤差 m

$$[pvv] = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + \cdots + p_nv_n^2$$

$$[pvv] = p_1 \cdot (L_1 - \bar{L})^2 + p_2 \cdot (L_2 - \bar{L})^2 + \cdots + p_n \cdot (L_n - \bar{L})^2$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{p_1 \cdot (L_1 - \bar{L})^2 + p_2 \cdot (L_2 - \bar{L})^2 + \cdots + p_n \cdot (L_n - \bar{L})^2}{n-1}}$$

(五) 計算觀測量最或是值中誤差 σ

$$\sigma = \pm \frac{m}{\sqrt{[p]}}, \sigma = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{[p] \cdot (n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{p_1 \cdot (L_1 - \bar{L})^2 + p_2 \cdot (L_2 - \bar{L})^2 + \cdots + p_n \cdot (L_n - \bar{L})^2}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) \cdot (n-1)}}$$