

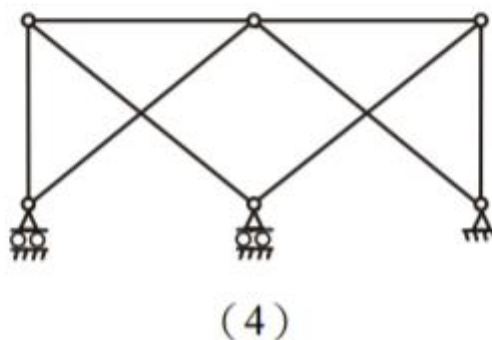
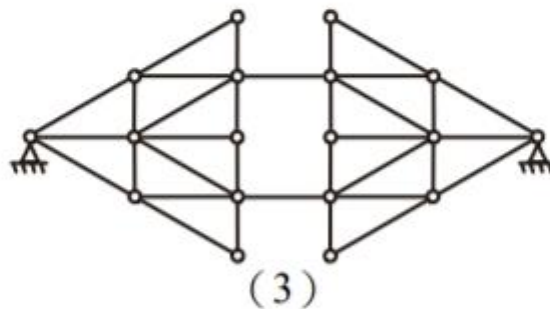
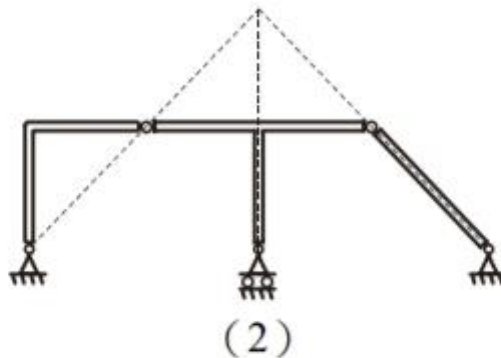
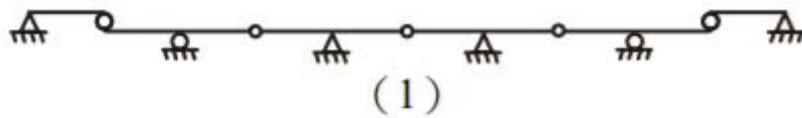
110 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：土木工程

科 目：結構學

墨庸老師解題

一、下圖中有(1)、(2)、(3)、(4)四個平面結構物，小圓符號代表鉸接或滾接，否則為剛接。請判定它們為不穩定結構或穩定結構？若為不穩定結構，請說明不穩定原因；若為穩定結構，請判別其靜不定的次數 R 。($R=0$ ，即表示為靜定結構。)(20 分)

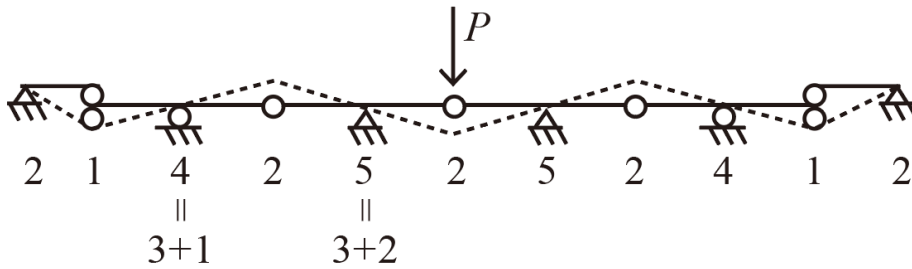


考題難度：★★☆☆☆

分析：利用 $R=NE-3n$ 及檢查是否有特殊不穩定結構型式(如三鉸共線)以判斷結構之穩定性

【擬答】

(1)

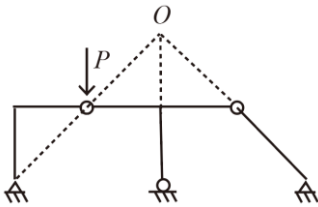


$$n=10 \Rightarrow R = NE - 3n = 30 - 3 \times 10 = 0$$

但當力量 P 如圖施加時，會產生如翹翹板之剛體運動 $\Rightarrow$ (不穩定)。

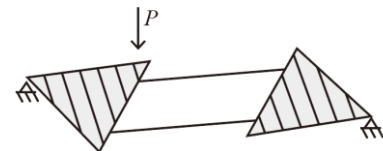
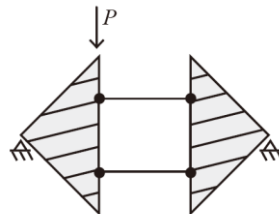
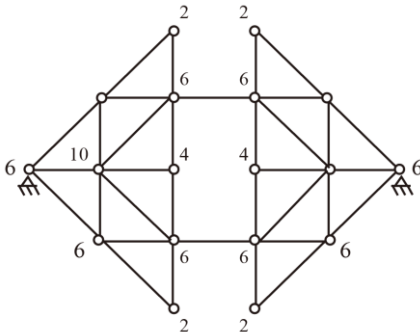
(2)

本題反力共點，當外力施於 O 以外之點時(如下圖 P 力)， $\sum M \neq 0$ 無法保持靜平衡 $\Rightarrow$ (不穩定)。

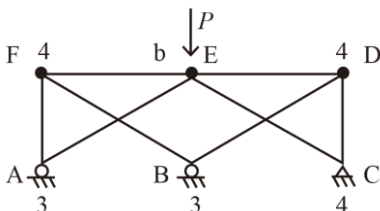


(3) $n=16 \times 2 + 2 = 34$

$$R = 96 - 13n = -6 < 0 \rightarrow \text{不穩定}$$



(4)



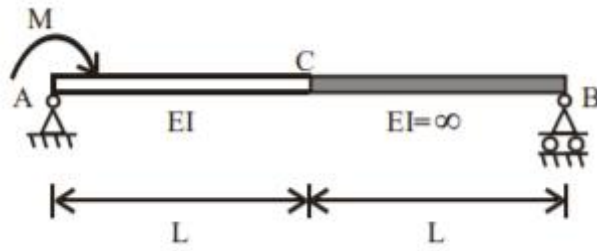
$$n=8 \Rightarrow R = 24 - 3n = 0$$

$\triangle AFE$ & $\triangle CDE$ 為穩固 $\triangle$ 結構，但因 A、B 皆為滾支承，受到如 P 作用於 E 時，即無法靜平衡

$$\left(\begin{array}{l} \sum F_C = 0 \Rightarrow C_x = 0 \Rightarrow T_{CE} \\ \text{看 E 點 } \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AE} \neq 0, \text{ 此時 A 點 } \sum F_x \neq 0 \end{array} \right)$$

公職王歷屆試題 (110 高考)

二、圖二為一水平梁，此梁 AC 段及 BC 段之斷面性質不同，AC 段為 EI、BC 段則為剛性(EI=∞)，相關尺寸配置如圖二所示。若於梁的 A 端施加一彎矩 M，試以共軛梁法求解此梁最大的垂直位移及其與 A 點的距離，另亦求解 A 點之轉角。(本題以其他方法求解，一律不予計分。)(25 分)

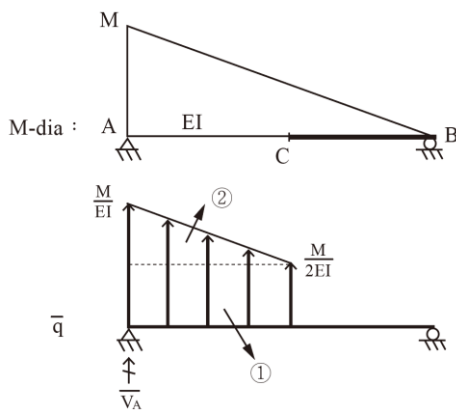


考題難度：★★★★☆☆

分析：1. $\overline{BC}$ 段 $\frac{M}{EI} = 0$ ，即 $\bar{q} = 0$

2. 求 $\triangle \max$ ，即為求 $\overline{M}_{\max}$ ，發生在 $\theta = \bar{V} = 0$ 處 ($x = x_m$)

【擬答】



$\bar{q}$:

$$(\rightarrow) \bar{q} = \frac{M}{EI} \left(1 - \frac{x}{2L}\right) \quad \text{for } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$(\rightarrow) \sum \bar{M}_B = 0$$

$$\frac{-ML}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}L + L\right) - \frac{ML}{2EI} \left(\frac{L}{2} + L\right) - \bar{V}_A(2L) = 0$$

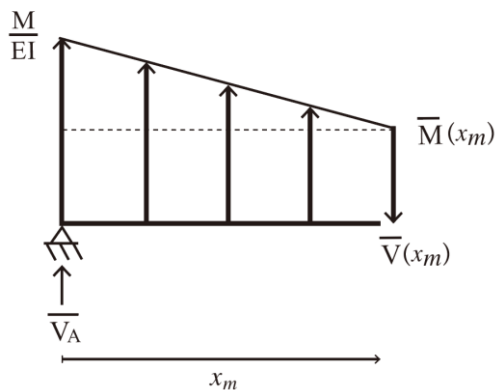
$$\Rightarrow \theta_A = \bar{V}_A = \frac{-7ML}{12EI} \quad (\text{負號代表負斜率或順時針旋轉})$$

$$(\rightarrow) \bar{V}(x) = \int_0^x \bar{q}(x') dx' + \bar{V}_A$$

$$= \frac{M}{EI} \left(x - \frac{x^2}{4L} - \frac{7}{12}L\right)$$

$$\text{Let } \bar{V}(x) = 0 \Rightarrow x = \left(2 \pm \frac{\sqrt{15}}{3}\right)L$$

$$\Rightarrow x_m = \left(2 - \frac{\sqrt{15}}{3}\right)L \approx 0.709L$$



$$(四) \sum \bar{M}_{xm} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta_{\max} = \bar{M}(x_m)$$

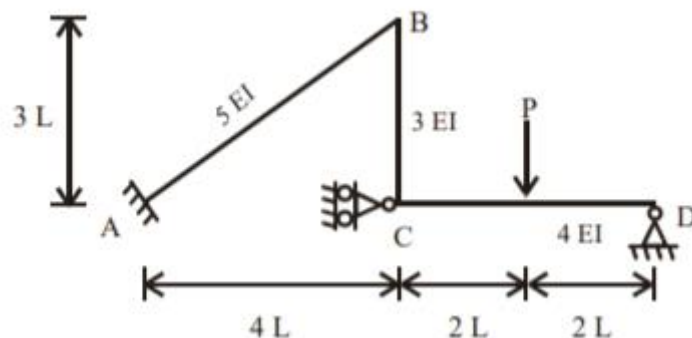
$$= \frac{M}{EI} \left(\frac{x_m^2}{2} - \frac{x_m^3}{12L} - \frac{7L}{12} x_m \right)$$

$$= \frac{ML^2}{EI} \left(\frac{1}{6} - \frac{5\sqrt{5}}{54} \right)$$

$$\approx -0.1919 \frac{ML^2}{EI} \text{ (負代表向下)}$$

三、下圖顯示一剛架結構，B 點及 C 點為剛接，剛架尺寸配置及各桿件斷面之 EI 值如圖所示。

若於 CD 桿件中點施加一集中載重 P，忽略各桿件軸向變形，試用彎矩分配法求解 A 點、B 點、C 點之端彎矩 M_{AB} 、 M_{BA} 及 M_{CB} 及 C 點垂直位移 Δ_C ，並請繪製此剛架結構受力後之彈性變形圖。(本題以其他方法求解，一律不予計分。)(30 分)



【擬答】

考題難度：★★★★☆

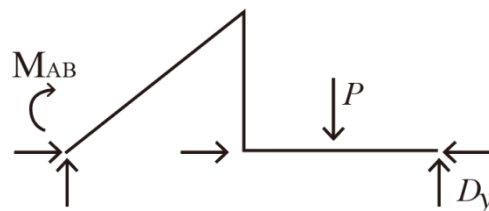
分析：本題 DOF=3(θ_B , θ_C , Δ_C)且有測移自由度 Δ_C ，若想避免多次迭代，可考慮非迭代彎矩分配法。

(-) DF

$$k_{AB} = \frac{4(5EI)}{5L}, \quad k_{BC} = \frac{4(3EI)}{3L}, \quad k_{CD} = \frac{3(4EI)}{4L}$$

$$\Rightarrow DF_{AB} = 0, \quad DF_{BA} = \frac{k_{AB}}{k_{AB} + k_{BC}} = \frac{1}{2}, \quad DF_{BC} = \frac{k_{BC}}{k_{AB} + k_{BC}} = \frac{1}{2}$$

$$DF_{CB} = \frac{k_{BC}}{k_{BC} + k_{CD}} = \frac{4}{7}, \quad DF_{CD} = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

(二) M^F / M^H

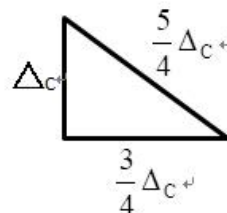
$$1. \text{轉角部份: } M_{CD}^F = -\frac{3P(4L)}{16} = -\frac{3PL}{4}$$

2. 側移部份: (設 Δ_C 向下為正)

$$M_{CD}^H = \frac{3(4EI)}{(4L)^2} \Delta_C = a$$

$$M_{BC}^F = -\frac{6(3EI)}{(3L)^2} \left(\frac{3}{4} \Delta_C\right) = -2a = M_{CB}^F$$

$$M_{BA}^F = M_{AB}^F = -\frac{6(5EI)}{(5L)^2} \left(\frac{5}{4} \Delta_C\right) = -2a \quad (\text{LET } a = \frac{3EI}{4L} \Delta_C)$$

(三) M_{ij} 列表

Joint	A	B		C	
Member	AB	BA	BC	CB	CD
DF	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$
MF	$-2a$	$-2a$	$-2a$	$-2a$	$-\frac{3PL}{4}$
		$2x$	$2x$	$4y$	a
	x		$2y$	x	
$\sum M$	$x - 2a$	$2x - 2a$	$2x + 2y - 2a$	$x + 4y - 2a$	$3y + a - \frac{3PL}{4}$

(四) 平衡

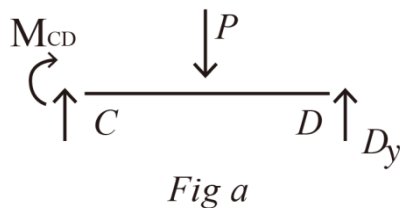
$$\text{B} \quad \sum M_B = 0$$

$$\Rightarrow M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow 4x + 2y - 4a = 0$$

$$\text{C} \quad \sum M_C = 0$$

$$\Rightarrow M_{CB} + M_{CD} = 0 \Rightarrow x + 7y - a - \frac{3PL}{4} = 0$$

$$\text{側} \quad \sum M_C = 0 \Rightarrow D_y = \frac{M_{CD} + 2PL}{4L}$$



$$\text{看整體: } \sum M_A = 0$$

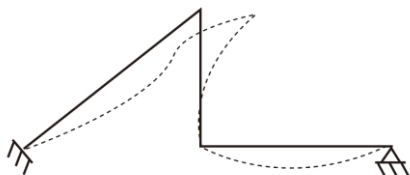
$$\Rightarrow M_B^A + 6PL - D_y(8L) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{67}{78} PL, y = \frac{3}{26} PL, a = \frac{11}{12} PL$$

$$\Rightarrow (M_{AB}, M_{BA}, M_{CB}) = \left(-\frac{38}{39} PL, \frac{-3}{26} PL, \frac{-20}{39} PL \right)$$

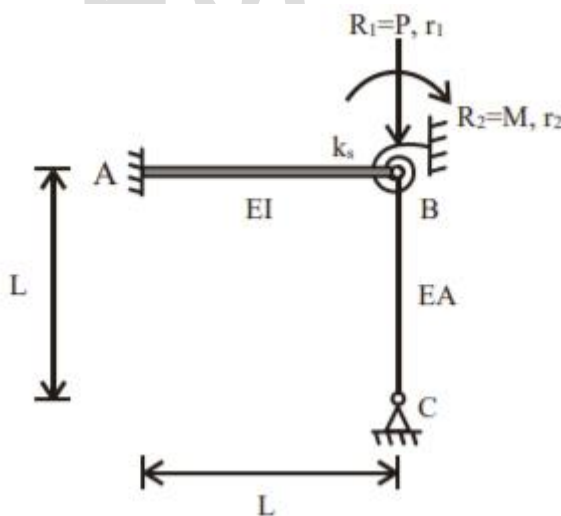
$$\Delta_C = \frac{4L}{3EI} a = \frac{11PL^3}{9EI}$$

變形圖詳 Fig.b.



四、下圖顯示一懸臂梁 AB 與二力桿 BC 於 B 點鉸接處使用一螺旋彈簧連結，此彈簧勁度為 k_s ，桿件 AB 之斷面性質為 EI、二力桿件 BC 為 EA。已知 B 點垂直位移及旋轉之自由度分別為 r_1 及 r_2 ，相應之垂直力 R_1 為 P、彎矩 R_2 為 M。試依據圖中所示之自由度 r_1 及 r_2 ，以直接勁度法求此結構之勁度矩陣 $[K]_{2 \times 2}$ ；若考慮 $M=0$ ，試求解僅有外力 P 作用下之勁度矩陣 $[K]_{1 \times 1}$ ，並請依照 $[K]_{1 \times 1}$ 求解 B 點垂直位移 Δ_B 。(本題以其他方法求解，一律不予計分。)(25 分)

(已知： $EA/L=EI/L^3$ ； $k_s=5EI/L$)



【擬答】

考題難度：★★☆☆☆

分析：不用求變位與內力，可簡化計算。

(一)

1. $\{R\}$

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix}$$

2. $[K]$

$$(1) \text{ let } \{r\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$k_{11} = \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L} = \frac{12EI}{L^3} + \frac{EI}{L^3} = \frac{13EI}{L^3}$$

$$k_{21} = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$(2) \text{ let } \{r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$k_{12} = \frac{-6EI}{L^2}$$

$$k_{22} = \frac{4EI}{L} + k_s = \frac{9EI}{L}$$

$$\Rightarrow [k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 13 & -6L \\ -6L & 9L^2 \end{bmatrix}$$

$$(\Rightarrow) \text{ 由 } \{R\} = [k]\{r\}$$

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 13 & -6L \\ -6L & 9L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} \quad \text{ } \times \frac{2}{3L}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -6L & 9L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_B \\ \theta_B \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{P\} = \left[\frac{9EI}{L^3} \right] \{\Delta_B\}$$

$$[K]_{1 \times 1} = \left[\frac{9EI}{L^3} \right]$$

$$\Delta_B = \frac{PL^3}{9EI} \quad (\text{向下})$$