

# 110 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程、電信工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

吳迪老師解題

甲、申論題部：(50 分)

一、求  $y'' + 8xy' + 16y = 1 + e^{-4x}$  的通解 (general solution)。(15 分)

1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：二階常微分方程, 基本題
3. 《命中特區》：吳迪著工程數學 P2-18 範例 15

【擬答】：

$$(-)y'' + 8xy' + 16y = 1 + e^{-4x}$$

1. 先求  $y_h$

令  $y = e^{\lambda x}$  代入得特徵方程式

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda + 4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -4, -4$$

$$\therefore y_h = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$$

2. 求  $y_p$ ，利用逆運算子法

$$(D^2 + 8D + 16)y = 1 + e^{-4x}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2 + 8D + 16} + \frac{1}{(D + 4)^2} e^{-4x}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{x^2}{2!} e^{-4x} = \frac{1}{16} x^2 e^{-4x} + \frac{1}{16}$$

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x} + \frac{1}{16} x^2 e^{-4x} + \frac{1}{16}$$

志光 學儒 保成 **工 科 人 專 屬 學 習 規 劃**

精心安排完整豐富的上榜課程

工科考試所需要的資源，我們通通幫你準備好了

**法科架構班**

學校沒教的，我們教給你！名師精解法科知識，結合實務例子，助你建構法科概念。

**扎實正規班**

完整堂數規劃，循序漸進學習，讓您深度修習工科各專業學科知識。

**作文實戰班**

作文再也不是理工人的痛！透過專業老師的輔導，快速強化您的寫作架構、邏輯概念。

**主題題庫班**

主題式教學，搭配各類試題演練，進行考點分析及破題要點訓練，讓您短時間各科實力倍增。



**精華總複習**

考前重點總複習，精準掌握重要考點，讓您考前實力突飛猛進。

**考前提要關懷講座**

名師考前最終提點，穩定你累積許久的實力，讓你的觀念更加清晰。

**全國全真模擬考**

檢視應考實力、訓練臨場反應、掌握最新考題趨勢，全程比照考試時程，模擬考場實戰氛圍，讓您能以平常心應考！

**工科全科班**

公職+國營完善循環課程規劃，All in One課程一次到位，奠定穩固基礎、強化上榜實力。

109 普考 電子工程  
曾○維  
一年考取

**我是工科人，我工頂啦！**

由於考試的題目非常靈活，參加題庫班，除了勤做考古題外，大量實作解說，很快速地強化我的考前記憶，每做一道題目馬上能判斷是在哪一章節，然後再進行解題。

■完整課程資訊詳洽全國志光·學儒·保成門市■

二、求  $\int_{\varphi} z^2 dz$ ，其中  $\varphi = t + i2t$ ， $0 \leq t \leq 1$ 。(10 分)

1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：複變積分，基本題
3. 《命中特區》：吳迪著工程數學 P10-20，範例 24

【擬答】：

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} z^2 dz &= \int_0^{1+2i} z^2 dz \\ &= \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+2i} = \frac{1}{3} (1+2i)^3 \\ &= -11 - 2i\end{aligned}$$

三、一副標準 52 張的撲克牌，隨意抽出 3 張。求其為同花 (3 張為同一花色) 的機率。(5 分)

1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：古典機率，基本題
3. 《命中特區》：吳迪著工程數學 P7-6，範例 4

【擬答】：

$$\begin{aligned}P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{C_1^4 \times C_3^{13}}{5_3^{52}} \\ &= \frac{1144}{22100} = \frac{286}{5525}\end{aligned}$$



## 為你專屬設計的學習模式， 讓你靈活學習、輕鬆準備！

我們都在 **志光學儒保成** 成功找到工科人的工頂人生

### 多元學習模式



面授學習

直接，有效

- 實際面對面教學，現場解決您的疑惑。
- 優質專業名師，幫您統整、分析考試重點資訊。
- 定期的大小測驗，您可隨時檢視學習效果。



雲端函授

自主，彈性

- 不用煩惱通勤問題，課程教材直接送到家。
- 反覆聽課，不怕觀念聽不懂。
- 完全自由，可自主安排學習進度。



視訊學習

便利，專注

- 安靜舒適的上課環境，提高您的專注力。
- 看課時間能自由預約，無須擔心時間衝突。
- 可依需求暫停、倒轉或快轉，深度學習超簡單。



#### 專業名師指導，提升解題順暢度！

本以為適合闢蕪，但發現穩定的生活才是我想要的。老師的教材都有明確分析與統整，再加上會由老師出申論題讓考生做練習，增加寫題目的敏感及順暢度。考前還有總複習課程，精準預測範圍、統整考前重點。

**全國探花** 李○庭 109年鐵路員級機械工程



#### 選對好老師，中年轉職好順利！

我遭遭公司裁員，覺得公職夠穩定，決定踏上國考之路。隔了20幾年重拾書本，選擇好的補習班讓我事半功倍。熱力學老師跟流體力學老師，我非常推崇，只要照著老師講的記下來、寫下來，這樣就夠了。

**1年考取** 古○芳 109年高考機械工程



#### 題庫班老師的講解，對我幫助很大！

畢業後工作，累的要死薪水卻不怎麼樣。剛好朋友推薦鐵路特考，就挑戰看看。我覺得機械原理的題庫班對我幫助很大，跟著老師一起解，不懂的地方聽老師講解，覺得聽完很多疑問就會解開並且對我幫助很大。

**優秀考取** 謝○軒 109年鐵路佐級機械工程

$$\text{四、} A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

(一)求其行列式值 (determinant)。(5 分)

(二)求特徵值 (eigenvalues) 與其對應的特徵向量 (eigenvectors)。(10 分)

(三)求  $P$ ,  $P^{-1}AP$  為  $A$  之對角化 (diagonalized) 矩陣。(5 分)

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：矩陣對角化, 基本題, 但計算要小心
3. 《命中特區》：吳迪著工程數學 P8-45, 範例 45

【擬答】：

$$\text{(一)} \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -275 - 192 - 192 + 176 + 240 + 240 = -3$$

$$\text{(二)} \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & 4 \\ 12 & -11-\lambda & 12 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 3) = 0$$

$$1. \lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 12 & -12 & 12 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$2. \lambda = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 12 & -8 & 12 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = K_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(三)} p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 使得}$$

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

乙、測驗題部分：(50 分)

(A) 1.  $2 \times 2$  實數矩陣  $Q$  的特徵值為  $-2$ 、 $-3$ 。若定義矩陣跡(trace)為對角線元素相加, 則  $Q$  的跡(trace) 為何值?

(A)-5

(B)-3

(C)-2

(D)5

公職王歷屆試題 (110 高考三級)

(A) 2. 令  $T$  和  $S$  為  $R^3$  映射至  $R^2$  的線性轉換 (linear transformation)，其中  $T(x,y,z)=(x-y,z+y)$ ， $S(x,y,z)=(x+z,x+y)$ 。下列向量何者屬於  $T+S$  的零空間 (nullspace)？

- (A)(6,2,-10) (B)(3,2,-5) (C)(3,-2,5) (D)(-6,-2,-10)

(B) 3. 給定矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 10 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ 。則矩陣  $ABC^{-1}$  的行列式值為何？

- (A)-6 (B)-0.75 (C)0.25 (D)0.75

(C) 4. 考慮如下所示之過度限制 (over-determined) 線性聯立方程式：

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = -1 \\ x + 3y = 2 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$$

如果這個聯立方程式的最小平方誤差解 (least-squared-error solution) 為  $x = \alpha, y = \beta$ ，那麼在下列敘述之中，何者為正確？

- (A) $\alpha > \beta$  (B) $\alpha^2 > \beta$  (C) $\alpha + \beta > \alpha \cdot \beta$  (D) $3\alpha + 2\beta > 0$

(A) 5. 考慮一個作用在  $R^2 = \{(x,y) | x,y \in R\}$  的線性轉換 (linear transformation)  $T$ 。已知  $T(1,-1)=(3,2)$ 、 $T(1,1)=(1,-5)$ 。若是  $S$  表示  $T$  的反轉換 (inverse transformation)，而且  $S(2,-7)=(p,q)$ ，那麼  $p+q$  與下列那一個數值最接近 (也就是說差值的絕對值最小)？

- (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

(C) 6. 考慮如下所示之線性聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 3x_4 = 1 \\ 0x_1 + 5x_2 + \alpha x_3 + 0x_4 = -7 \\ 1x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 0x_4 = 13 \\ 0x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

若是已知此聯立方程式無解，那麼在下列有關於  $\alpha$  之敘述，何者正確？

- (A) $-\infty < \alpha \leq -5$  (B) $-5 < \alpha \leq 0$  (C) $0 < \alpha \leq 5$  (D) $5 < \alpha \leq \infty$

(D) 7. 我們考慮一個矩陣： $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & x & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ，若已知此矩陣為不可逆 (not invertible)，那麼請問  $x$  的

數值為何？

- (A)-3 (B)12 (C) $2\sqrt{3}$  (D)4

(C) 8. 有一條三維空間中的曲線，曲線上的點的坐標  $(x,y,z)$  以參數式來表示為： $x(t)=2\sin(t)$ 、 $y(t)=2\cos(t)$ 、 $z(t)=5t$ 。請問此曲線在  $(0,2,0)$  到  $(\sqrt{3}, 1, 5 \cdot \frac{\pi}{3})$  這個區間內的長度與下列那一個數值

最接近 (也就是說差值的絕對值最小)？

- (A)2 (B)4 (C)6 (D)8

(A) 9. 如果  $3e^{i\pi/3} + 5e^{-i\pi/4} + 2e^{i\pi} = x + iy$  ( $i = \sqrt{-1}$ )，那麼下列有關於  $x$ 、 $y$  之敘述，何者正確？

- (A) $x \cdot y < 0$   
 (B) $x + y < 0$   
 (C) $|x| < |y|$  ( $|x|, |y|$  分別代表  $x$  與  $y$  之絕對值)  
 (D) $x - y < x + y$

(D) 10. 令  $i$  為單位虛數，則  $\sin(\pi + i)$  的實部(real part)為何？

- (A) $\pi$  (B)1 (C)-1 (D)0

(B) 11. 若積分路徑  $C$  為逆時鐘方向且滿足  $|z| = 1$ ，則複變函數積分  $\oint_C \frac{4z^2+z+2}{z(4z^2-17z+4)} dz$  之值為何？

- (A) $\pi i$  (B) $-\pi i$  (C) $-2\pi i$  (D) $-13\pi i$

(D) 12. 我們考慮複變函數  $f(z)=z^2+1$  ( $z=x+iy$ ) 沿著曲線  $\Gamma$  作線積分 (line integral)，其中  $\Gamma$  代表在複數平面上由  $y=x^2$  來描述的曲線；我們的積分範圍是從  $0+i0$  到  $1+i1$ 。我們用  $\alpha + i\beta$  來代表這一個線積分的結果，此結果可以看成複數平面上的一個點。若是採用這個觀點，那麼  $\alpha + i\beta$  與下列複數平面上的四個點之中的那一個最接近 (也就是距離最小)？

- (A) $0+i0$  (B) $1+i1$  (C) $1+i0$  (D) $0+i1$

(D) 13. 考慮如下所示之初始值問題 (initial-value problem)：

$$y'' - x^2 y' - 3xy = 0; y(0) = 1, y'(0) = -2$$

如果我們將解 (solution) 寫成冪級數 (power series) 型：

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

那麼，下列選項何者正確？(可以試著套用函數的泰勒級數展開表示法 (Taylor-series)。)

- (A) $a_0 = 2$  (B) $a_1 = \frac{1}{3}$  (C) $a_2 = \frac{3}{2}$  (D) $a_3 = \frac{1}{2}$

(C) 14. 假設  $y(x)$  可以由下列微分方程來描述：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 1}{2y + 5}$$

而且合乎初始條件： $y(1) = -1$ 。請問  $y(0) = ?$

- (A)-2 或 -3 或 5 (B)2 (C)-4 或 -1 (D)3 或 4

(B) 15. 下列選項之中，何者屬於線性 (linear) 微分方程式？

- (A) $y''(t) + t^2 \cdot y'(t) + \cos(t) \cdot (y(t))^2 = 0$  (B) $y''(t) + 2y'(t) + e^{-1} \cdot y'(t) = \sin(2t)$   
(C) $y(t) \cdot y''(t) + t^2 \cdot y'(t) + \cos(t) \cdot y(t) = 0$  (D) $y''(t) + 2t \cdot y'(t) + e^{-1} \cdot y(t) = \sqrt{y(t)}$

(A) 16. 給定微分方程式  $\frac{dy}{dt} + 2y = t\delta(t - 2)$ ，初始值為  $y(0) = 0$ ， $\delta(t)$  為脈衝函數 (impulse function)。

則  $y(t)$  的拉氏轉換 (Laplace transform) 為何？

- (A) $\frac{2}{s+2} e^{-2s}$  (B) $\frac{1}{s^2(s+2)} e^{-2s}$  (C) $\frac{s^2}{s^2(s+2)} e^{-2s}$  (D) $\frac{2s^2}{s^2(s+2)} e^{-2s}$

(C) 17. 考慮微分方程式  $y'' + 5y' + 6y = x$ ，初始值為  $y(0) = A$  和  $y'(0) = B$ 。若其解為

$$y = \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{6}x + c$$

- (A)2 (B) $\frac{1}{3}$  (C) $\frac{1}{18}$  (D) $\frac{1}{36}$

(C) 18. 有兩位桌球選手，根據以往的經驗，在每一局的比賽之中兩人的勝率比例為 6 比 4。如果他們進行一場五戰三勝的比賽 (也就是搶先贏得三局的選手為整場比賽的勝利者)，那麼請問這場比賽會剛好在打完第四局的時候分出勝負的機率為何？

- (A) $\frac{75}{625}$  (B) $\frac{162}{625}$  (C) $\frac{234}{625}$  (D) $\frac{375}{625}$



公職王歷屆試題 (110 高考三級)

(B) 19. 有兩個隨機變數  $X$  與  $Y$ ，我們以  $P_{XY}(x,y)=\text{Prob}(X=x,Y=y)$  來代表其合併機率函數 (joint probability function)，且其值如下所示： $P_{XY}(1,1)=0.07$ 、 $P_{XY}(1,2)=0.09$ 、 $P_{XY}(1,3)=0.12$ 、 $P_{XY}(2,1)=0.25$ 、 $P_{XY}(2,2)=0.07$ 、 $P_{XY}(2,3)=0.18$ 、 $P_{XY}(3,1)=0.06$ 、 $P_{XY}(3,2)=0.07$ 、 $P_{XY}(3,3)=0.09$ 。請計算下列條件機率之值： $\text{Prob}(Y=3|X=2)=?$

- (A)0.25                      (B)0.36                      (C)0.60                      (D)0.84

(B) 20. 設  $X$  為一連續隨機變數 (random variable)，機率密度函數 (probability density function) 為常態分布 (normal distribution)，平均值為 45，標準差為 15。若欲將  $X$  轉換為  $Y$ ，其機率密度函數仍為常態分布，平均值為 65，標準差為 10。則  $X$  與  $Y$  的關係式為下列何者？

- (A) $Y = \frac{1}{3}X + 50$               (B) $Y = \frac{2}{3}X + 35$               (C) $Y = \frac{2}{5}X + 47$               (D) $Y = X + 20$

志光學儒保成

# 公職工科+國營事業

**1+1 更有力** 準備公職的同時，可報考國營事業考試，善用重疊考科，一次準備就能多次上榜！

上榜路徑大公開！一年內超過**8**次上榜機會！

<b>初等考</b> 1月 ● 最容易上手的公職考試	<b>關務特考</b> 4月 ● 考科少於同職等考試	<b>鐵路特考</b> 6月 (110年因疫情延至9月) ● 佐級錄取率最高	<b>高普考</b> 7月 (110年因疫情延至10月) ● 主流考試，缺額眾多	<b>調查局特考</b> 8月 (110年因疫情延至10月) ● 三等月薪76,000起
<b>地方特考</b> 12月 ● 考科同高普考	<b>自來水評價人員</b> 不定期舉辦 ● 只考選擇題	<b>台電考試</b> 不定期舉辦 ● 考科少、好準備	<b>中油僱員</b> 不定期舉辦 ● 只考2科，多為選擇題	<b>國營事業職員級</b> 不定期舉辦 ● 國營退休潮，缺額多，工科類科競爭者少

**錄取率高** 109年 工科錄取率 最高達**19.42%**

<b>電力工程</b>	<b>電子工程</b>	<b>機械工程</b>	<b>資訊工程</b>
高考 19.42%	高考 9.04%	高考 18.27%	高考 12.92%
普考 17.33%	普考 9.39%	普考 13.70%	普考 10.47%