110 年公務人員高等考試三級考試試題

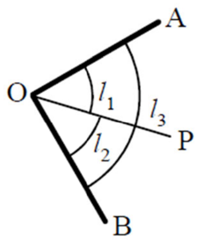
等　別：三等考試
類　科：測量製圖
科　目：測量平差法（包括誤差理論及實務）

甲、申論題部分：

一、如圖所示，等精度觀測了三角度，觀測向量為

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30°45'20'' \\ 47°12'54'' \\ 77°58'20'' \end{bmatrix}$$

已知 $\angle AOB = 77°58'24''$ ，以間接觀測平差分析 $\angle AOP$、$\angle POB$ 的最或是值。（20 分）



【解題關鍵】
1.《考題難易》★★★★
2.《破題關鍵》關鍵字：間接觀測平差。重點提要：需要再加入條件觀測平差。
【命中特區】
書名：測量學 上課教材(2019 年版)
作者：賴明
章節出處：第五章 間接觀測平差　與　第六章 條件觀測平差

【擬答】

㈠以間接觀測平差分析：等精度觀測

設：$\angle AOP=\ell_1+x_1=30°45'20''+x_1$，$\angle POB=\ell_2+x_2=47°12'54''+x_2$

觀測方程式：$\begin{cases}\ell_1+v_1=\ell_1+x_1\\ \ell_2+v_2=\ell_2+x_2\\ \ell_3+v_3=(\ell_1+x_1)+(\ell_2+x_2)\end{cases}$

改正數方程式：$\begin{cases}v_1=x_1\\ v_2=x_2\\ v_3=x_1+x_2+\ell_1+\ell_2-\ell_3\end{cases}$，$\begin{cases}v_1=x_1\\ v_2=x_2\\ v_3=x_1+x_2-6''\end{cases}$，$V=AX-L$

$\because\ \ell_1+\ell_2-\ell_3=30°45'20''+47°12'54''-77°58'20''=-6''$

$$V=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix}0\\0\\6\end{bmatrix}$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix},\ A^TL=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\0\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix}$$

㈡以條件觀測平差分析：等精度觀測

$\because$ 已知$\angle AOB=77°58'24''$，$(\ell_1+x_1)+(\ell_2+x_2)-77°58'24''=0$，

$x_1+x_2+(\ell_1+\ell_2-77°58'24'')=0$

$\ell_1+\ell_2-77°58'24''=30°45'20''+47°12'54''-77°58'24''=-10''$

$\therefore\ x_1+x_2-10''=0$

$BV+W=0$，$B=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}$，$W=-10''$

㈢整合間接觀測平差、條件觀測平差進行分析　矩陣式

矩陣式 $\begin{bmatrix}A^TA&B^T\\B&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}X\\K\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^TL\\-W\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\6\\10\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{vmatrix}}\times adj\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\1&-1&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}6\\6\\10\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6\\6\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\5\\-9\end{bmatrix}$$

$x_1=+5''$，$\angle AOP$ 最或是值：$\angle AOP=\ell_1+x_1=30°45'20''+5''=30°45'25''$

$x_2=+5''$，$\angle POB$ 的最或是值：$\angle POB=\ell_2+x_2=47°12'54''+5''=47°12'59''$

$\angle AOP+\angle POB=30°45'25''+47°12'59''=77°58'24''=$已知值

二、某一平差問題，觀測值向量 $L_{5\times1}$ 為等精度獨立觀測值，已求出的法方程式如下：

$$\begin{bmatrix}32.51 & 11.20\\11.20 & 24.65\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12.20\\-9.35\end{bmatrix}=0$$

試求出此平差問題中的單位權變方估值 $\hat{\sigma}_0^2$？（20 分）

【解題關鍵】
1.《考題難易》★★★★
2.《破題關鍵》關鍵字：間接觀測平差。重點提要：最小二乘法之基本定義。
【命中特區】
書名：測量學 上課教材(2019 年版)
作者：賴明
章節出處：第五章 間接觀測平差

【擬答】

$V=AX-L$，觀測值向量為等精度獨立觀測值，由最小二乘法，

$A^TAX=A^TL$，$N=A^TA$，$U=A^TL$，$X=N^{-1}U$ 或 $X=N^{-1}A^TL$

$\because$ 觀測值向量為 $L_{5\times1}$，觀測數 $n=5$，未知數 $u=2$，自由度 $r=n-u=5-2=3$

$\therefore$ 單位權變方估值 $\hat{\sigma}_0^2=\dfrac{[VV]}{r}=\dfrac{1}{3}[VV]$

$[VV]=V^TV=(AX-L)^T\cdot(AX-L)=(X^TA^T-L^T)\cdot(AX-L)$

$[VV]=X^TA^TAX-X^TA^TL-L^TAX+L^TL$　　$(X=N^{-1}U=N^{-1}A^TL)$

$=X^TA^TAN^{-1}A^TL-X^TA^TL-L^TAN^{-1}A^TL+L^TL$　　$(A^TA=N,N\cdot N^{-1}=I)$

$=X^TA^TL-X^TA^TL-L^TAN^{-1}A^TL+L^TL$　　$(U=A^TL,U^T=L^TA)$

$=L^TL-U^TN^{-1}U$

由已知 $\begin{bmatrix}32.51 & 11.20\\11.20 & 24.65\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12.20\\-9.35\end{bmatrix}=0$，$\begin{bmatrix}32.51 & 11.20\\11.20 & 24.65\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12.20\\9.35\end{bmatrix}$

$N=\begin{bmatrix}32.51 & 11.20\\11.20 & 24.65\end{bmatrix}$，$U=\begin{bmatrix}-12.20\\9.35\end{bmatrix}$

$$N^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}32.51 & 11.20\\ 11.20 & 24.65\end{vmatrix}}\cdot\begin{bmatrix}24.65 & -11.20\\ -11.20 & 32.51\end{bmatrix}=\frac{1}{675.9315}\begin{bmatrix}24.65 & -11.20\\ -11.20 & 32.51\end{bmatrix}$$

$$U^{T}N^{-1}U=\begin{bmatrix}-12.20 & 9.35\end{bmatrix}\times\frac{1}{675.9315}\begin{bmatrix}24.65 & -11.20\\ -11.20 & 32.51\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-12.20\\ 9.35\end{bmatrix}=13.413$$

$\therefore$ 單位權變方估值 $\hat{\sigma}_0^2=\frac{[VV]}{r}=\frac{1}{3}[VV]=\frac{1}{3}\times\left(L^{T}L-13.413\right)$

三、已知隨機變數 x、y 的標準差分別為 σ_x、σ_y，相關係數 $\rho_{xy}=-1$，試求函數 $u=x^2+ay$ 的變方 σ_u^2。（20 分）

【解題關鍵】

1.《考題難易》★★★

2.《破題關鍵》關鍵字：誤差傳播定律。重點提要：相關係數之定義。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第四章　多變量函數之誤差傳播 之 二、非線性函數之誤差傳播定律

【擬答】

$$\because\ \rho_{xy}=-1，\rho_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=-1，\sigma_{xy}=-\sigma_x\cdot\sigma_y$$

$$u=x^2+ay\quad，du=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy=2x\cdot dx+a\cdot dy$$

$$[\sigma_u^2]=[2x\quad a]\times\begin{bmatrix}\sigma_x^2 & \sigma_{xy}\\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2x\\ a\end{bmatrix}=[2x\cdot\sigma_x^2+a\cdot\sigma_{xy}\quad 2x\cdot\sigma_{xy}+a\cdot\sigma_y^2]\times\begin{bmatrix}2x\\ a\end{bmatrix}$$

$$\sigma_u^2=2x\cdot(2x\cdot\sigma_x^2+a\cdot\sigma_{xy})+a\cdot(2x\cdot\sigma_{xy}+a\cdot\sigma_y^2)$$

$$\sigma_u^2=4x^2\cdot\sigma_x^2+4ax\cdot\sigma_{xy}+a^2\cdot\sigma_y^2=4x^2\cdot\sigma_x^2-4ax\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y+a^2\cdot\sigma_y^2=(2x\cdot\sigma_x-a\cdot\sigma_y)^2$$

$$\therefore\quad 變方\ \sigma_u^2=(2x\cdot\sigma_x-a\cdot\sigma_y)^2$$

四、一平坦地區直線距離長度約為 150 m，欲以 50 m 長的捲尺分段量測之。假設量測每一段長度之中誤差為 $\frac{a}{2500}+5\text{mm}$，段與段相接處量測時皆會產生±5mm 的中誤差，且捲尺兩端各有±3mm 的對點中誤差，試求分成三段（每段約 50m）作業時，總長度的中誤差。（20 分）

【解題關鍵】
1.《考題難易》★★
2.《破題關鍵》關鍵字：分段量距，計算總長。重點提要：誤差傳播定律。
【命中特區】
書名：測量學 上課教材(2019 年版)
作者：賴明
章節出處：第二章　誤差傳播定律及其應用

【擬答】

㈠量測每一段長度 ℓ 之中誤差之計算

$$\ell\approx a=50m=50\times1000mm，\sigma_a=\pm\left(\tfrac{50\times1000}{2500}+5\right)=\pm25mm$$

$$\sigma_\ell=\pm\sqrt{\sigma_a^2+2\times3^2}=\pm\sqrt{25^2+2\times9}=\pm\sqrt{643}$$

㈡計算總長度 L 的中誤差 σ_L：$L=\ell_1+\ell_2+\ell_3$

假設：各段距離 ℓ_i 相等，且中誤差均相同，均為 σ_ℓ

由誤差傳播定律，$\sigma_L=\pm\sqrt{3\times\sigma_\ell^2+2\times5^2}=\pm\sqrt{3\times643+50}=\pm\sqrt{1979}=\pm44.5mm$

五、直線方程式 y＝ax＋b，假設 x 為真值且觀測值 y 為等權獨立不相關，試由下列表格數據依最小二乘法估計 a、b。（20 分）

x	1	2	3	4	5
y	10.3	11.2	11.8	11.7	12.0

【解題關鍵】

1.《考題難易》★★★

2.《破題關鍵》關鍵字：間接觀測平差。重點提要：擬合曲線方程式。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第五章 間接觀測平差　之　一、線性函數之誤差傳播與誤差估值

【擬答】

觀測方程式 $\begin{cases} 10.3+v_1=a+b \\ 11.2+v_2=2a+b \\ 11.8+v_3=3a+b \\ 11.7+v_4=4a+b \\ 12.0+v_5=5a+b \end{cases}$，改正數方程式 $\begin{cases} v_1=a+b-10.3 \\ v_2=2a+b-11.2 \\ v_3=3a+b-11.8 \\ v_4=4a+b-11.7 \\ v_5=5a+b-12.0 \end{cases}$

$$V=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}，A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}，X=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}，L=\begin{bmatrix} 10.3 \\ 11.2 \\ 11.8 \\ 11.7 \\ 12.0 \end{bmatrix}，V=AX-L$$

組法方程式：$NX=U$，$N=A^TA$，$U=A^TL$

$$N=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}，N^{-1}=\frac{1}{50}\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 55 \end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 10.3 \\ 11.2 \\ 11.8 \\ 11.7 \\ 12.0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 174.9 \\ 57 \end{bmatrix}$$

$$X=N^{-1}U=\tfrac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 174.9 \\ 57 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.39 \\ 10.23 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\quad \therefore\ a=0.39，b=10.23$$