

110 年公務人員高等考試三級考試試題

等 別：三等考試

類 科：測量製圖

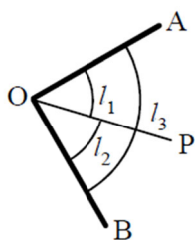
科 目：測量平差法 (包括誤差理論及實務)

甲、申論題部分：

一、如圖所示，等精度觀測了三角度，觀測向量為

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30^\circ 45' 20'' \\ 47^\circ 12' 54'' \\ 77^\circ 58' 20'' \end{bmatrix}$$

已知 $\angle AOB = 77^\circ 58' 24''$ ，以間接觀測平差分析 $\angle AOP$ 、 $\angle POB$ 的最或是值。(20 分)



公職

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：間接觀測平差。重點提要：需要再加入條件觀測平差。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第五章 間接觀測平差 與 第六章 條件觀測平差



為你專屬設計的學習模式， 讓你靈活學習、輕鬆準備！

我們都在 志光 學儒 保成 成功找到工科人的工頂人生

多元學習模式



面授學習

直接，有效

- 實際面對面教學，現場解決您的疑惑。
- 優質專業名師，幫您統整、分析考試重點資訊。
- 定期的大小測驗，您可隨時檢視學習效果。



雲端函授

自主，彈性

- 不用煩惱通勤問題，課程教材直接送到家。
- 反覆聽課，不怕觀念聽不懂。
- 完全自由，可自主安排學習進度。



視訊學習

便利，專注

- 安靜舒適的上課環境，提高您的專注力。
- 看課時間能自由預約，無須擔心時間衝突。
- 可依需求暫停、倒轉或快轉，深度學習超簡單。



專業名師指導，提升解題順暢度！

本以為適合闖蕩，但發現穩定的生活才是我想要的。老師的教材都有明確分析與統整，再加上會由老師出申論題讓考生做練習，增加寫題目的敏感及順暢度。考前還有總複習課程，精準預測範圍、統整考前重點。

全國探花 李○庭 109年鐵路員級機械工程



選對好老師，中年轉職好順利！

我進過公司裁員，覺得公職夠穩定，決定踏上國考之路。隔了20幾年重招舊本，選擇好的補習班讓我事半功倍。熱力學老師最流體力學老師，我非常推崇，只要照著老師講的記下來、寫下來，這樣就夠了。

1年考取 古○芳 109年高考機械工程



題庫班老師的講解，對我幫助很大！

畢業後工作，累的要死薪水卻不怎麼樣。剛好朋友推薦鐵路特考，就挑戰看看。我覺得機械原理的題庫班對我幫助很大，跟著老師一起歷，不懂的地方聽老師講解，覺得聽完很多疑問就會解開並且對我幫助很大。

優秀考取 謝○軒 109年鐵路佐級機械工程

【擬答】

(一)以間接觀測平差分析：等精度觀測

設： $\angle AOP = \ell_1 + x_1 = 30^\circ 45' 20'' + x_1$ ， $\angle POB = \ell_2 + x_2 = 47^\circ 12' 54'' + x_2$

$$\text{觀測方程式：} \begin{cases} \ell_1 + v_1 = \ell_1 + x_1 \\ \ell_2 + v_2 = \ell_2 + x_2 \\ \ell_3 + v_3 = (\ell_1 + x_1) + (\ell_2 + x_2) \end{cases}$$

$$\text{改正數方程式：} \begin{cases} v_1 = x_1 \\ v_2 = x_2 \\ v_3 = x_1 + x_2 + \ell_1 + \ell_2 - \ell_3 \end{cases}, \begin{cases} v_1 = x_1 \\ v_2 = x_2 \\ v_3 = x_1 + x_2 - 6'' \end{cases}, V = AX - L$$

$$\therefore \ell_1 + \ell_2 - \ell_3 = 30^\circ 45' 20'' + 47^\circ 12' 54'' - 77^\circ 58' 20'' = -6''$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A^T L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(二)以條件觀測平差分析：等精度觀測

\therefore 已知 $\angle AOB = 77^\circ 58' 24''$ ， $(\ell_1 + x_1) + (\ell_2 + x_2) - 77^\circ 58' 24'' = 0$ ，

$$x_1 + x_2 + (\ell_1 + \ell_2 - 77^\circ 58' 24'') = 0$$

$$\ell_1 + \ell_2 - 77^\circ 58' 24'' = 30^\circ 45' 20'' + 47^\circ 12' 54'' - 77^\circ 58' 24'' = -10''$$

$$\therefore x_1 + x_2 - 10'' = 0$$

$$BV + W = 0, B = [1 \ 1], W = -10''$$

(三)整合間接觀測平差、條件觀測平差進行分析 矩陣式

$$\text{矩陣式} \begin{bmatrix} A^T A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T L \\ -W \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} \times \text{adj} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = +5'' , \angle AOP \text{ 最或是值} : \angle AOP = \ell_1 + x_1 = 30^\circ 45' 20'' + 5'' = 30^\circ 45' 25''$$

$$x_2 = +5'' , \angle POB \text{ 的最或是值} : \angle POB = \ell_2 + x_2 = 47^\circ 12' 54'' + 5'' = 47^\circ 12' 59''$$

$$\angle AOP + \angle POB = 30^\circ 45' 25'' + 47^\circ 12' 59'' = 77^\circ 58' 24'' = \text{已知值}$$

二、某一平差問題，觀測值向量 $L_{5 \times 1}$ 為等精度獨立觀測值，已求出的法方程式如下：

$$\begin{bmatrix} 32.51 & 11.20 \\ 11.20 & 24.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12.20 \\ -9.35 \end{bmatrix} = 0$$

試求出此平差問題中的單位權變方估值 $\hat{\sigma}_0^2$? (20 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：間接觀測平差。重點提要：最小二乘法之基本定義。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第五章 間接觀測平差

【擬答】

$V = AX - L$ ，觀測值向量為等精度獨立觀測值，由最小二乘法，

$$A^T AX = A^T L, N = A^T A, U = A^T L, X = N^{-1}U \text{ 或 } X = N^{-1}A^T L$$

\therefore 觀測值向量為 $L_{5 \times 1}$ ，觀測數 $n=5$ ，未知數 $u=2$ ，自由度 $r=n-u=5-2=3$

$$\therefore \text{單位權變方估值 } \hat{\sigma}_0^2 = \frac{[VV]}{r} = \frac{1}{3}[VV]$$

$$[VV] = V^T V = (AX - L)^T \cdot (AX - L) = (X^T A^T - L^T) \cdot (AX - L)$$

$$[VV] = X^T A^T AX - X^T A^T L - L^T AX + L^T L \quad (X = N^{-1}U = N^{-1}A^T L)$$

$$= X^T A^T AN^{-1}A^T L - X^T A^T L - L^T AN^{-1}A^T L + L^T L \quad (A^T A = N, N \cdot N^{-1} = I)$$

$$= X^T A^T L - X^T A^T L - L^T AN^{-1}A^T L + L^T L \quad (U = A^T L, U^T = L^T A)$$

$$= L^T L - U^T N^{-1}U$$

$$\text{由已知 } \begin{bmatrix} 32.51 & 11.20 \\ 11.20 & 24.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12.20 \\ -9.35 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} 32.51 & 11.20 \\ 11.20 & 24.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.20 \\ 9.35 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 32.51 & 11.20 \\ 11.20 & 24.65 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -12.20 \\ 9.35 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 32.51 & 11.20 \\ 11.20 & 24.65 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 24.65 & -11.20 \\ -11.20 & 32.51 \end{bmatrix} = \frac{1}{675.9315} \begin{bmatrix} 24.65 & -11.20 \\ -11.20 & 32.51 \end{bmatrix}$$

$$U^T N^{-1} U = [-12.20 \quad 9.35] \times \frac{1}{675.9315} \begin{bmatrix} 24.65 & -11.20 \\ -11.20 & 32.51 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -12.20 \\ 9.35 \end{bmatrix} = 13.413$$

$$\therefore \text{單位權變方估值 } \hat{\sigma}_0^2 = \frac{[VV]}{r} = \frac{1}{3}[VV] = \frac{1}{3} \times (L^T L - 13.413)$$

志光學儒保成 工科人專屬學習規劃

精心安排完整豐富的上榜課程

工科考試所需要的資源，我們通通幫你準備好了

法科架構班

學校沒教的，我們教給你！名師精解法科知識，結合實務例子，助你建構法科概念。

扎實正規班

完整堂數規劃，循序漸進學習，讓您深度修習工科各專業學科知識。

作文實戰班

作文再也不是理工人的痛！透過專業老師的輔導，快速強化您的寫作架構、邏輯概念。

主題題庫班

主題式教學，搭配各類試題演練，進行考點分析及破題要點訓練，讓您短時間各科實力倍增。

精華總複習

考前重點總複習，精準掌握重要考點，讓您考前實力突飛猛進。

工科全科班

公職+國營完善循環課程規劃，All in One課程一次到位，奠定穩固基礎、強化上榜實力。

考前提要關懷講座

名師考前最終提點，穩定你累積許久的實力，讓你的觀念更加清晰。

全國全真模擬考

檢視應考實力、訓練臨場反應、掌握最新考題趨勢，全程比照考試時程，模擬考場實戰氛圍，讓您能以平常心應考！

109普考 電子工程

曾○維

一年考取

我是工科人，我工頂啦！

由於考試的題目非常靈活，參加題庫班，除了勤做考古題外，大量實作解說，很快地強化我的考前記憶，每做一道題目馬上能判斷是在哪一章節，然後再進行解題。

■完整課程資訊詳洽全國志光·學儒·保成門市■

三、已知隨機變數 x 、 y 的標準差分別為 σ_x 、 σ_y ，相關係數 $\rho_{xy} = -1$ ，試求函數 $u = x^2 + ay$ 的變方 σ_u^2 。(20分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★
2. 《破題關鍵》關鍵字：誤差傳播定律。重點提要：相關係數之定義。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第四章 多變量函數之誤差傳播 之二、非線性函數之誤差傳播定律

【擬答】

$$\because \rho_{xy} = -1, \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = -1, \sigma_{xy} = -\sigma_x \cdot \sigma_y$$

$$u = x^2 + ay, \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy = 2x \cdot dx + a \cdot dy$$

$$[\sigma_u^2] = [2x \quad a] \times \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2x \\ a \end{bmatrix} = [2x \cdot \sigma_x^2 + a \cdot \sigma_{xy} \quad 2x \cdot \sigma_{xy} + a \cdot \sigma_y^2] \times \begin{bmatrix} 2x \\ a \end{bmatrix}$$

$$\sigma_u^2 = 2x \cdot (2x \cdot \sigma_x^2 + a \cdot \sigma_{xy}) + a \cdot (2x \cdot \sigma_{xy} + a \cdot \sigma_y^2)$$

$$\sigma_u^2 = 4x^2 \cdot \sigma_x^2 + 4ax \cdot \sigma_{xy} + a^2 \cdot \sigma_y^2 = 4x^2 \cdot \sigma_x^2 - 4ax \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y + a^2 \cdot \sigma_y^2 = (2x \cdot \sigma_x - a \cdot \sigma_y)^2$$

$$\therefore \text{變方 } \sigma_u^2 = (2x \cdot \sigma_x - a \cdot \sigma_y)^2$$

四、一平坦地區直線距離長度約為 150 m，欲以 50 m 長的捲尺分段量測之。假設量測每一段長度之中誤差為 $\frac{a}{2500} + 5\text{mm}$ ，段與段相接處量測時皆會產生 $\pm 5\text{mm}$ 的中誤差，且捲尺兩端各有 $\pm 3\text{mm}$ 的對點中誤差，試求分成三段（每段約 50m）作業時，總長度的中誤差。（20 分）

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：分段量距，計算總長。重點提要：誤差傳播定律。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第二章 誤差傳播定律及其應用

【擬答】

(一)量測每一段長度 l 之中誤差之計算

$$l \approx a = 50\text{m} = 50 \times 1000\text{mm}, \quad \sigma_a = \pm \left(\frac{50 \times 1000}{2500} + 5 \right) = \pm 25\text{mm}$$

$$\sigma_l = \pm \sqrt{\sigma_a^2 + 2 \times 3^2} = \pm \sqrt{25^2 + 2 \times 9} = \pm \sqrt{643}$$

(二)計算總長度 L 的中誤差 σ_L ： $L = l_1 + l_2 + l_3$ 假設：各段距離 l_i 相等，且中誤差均相同，均為 σ_l

$$\text{由誤差傳播定律，} \sigma_L = \pm \sqrt{3 \times \sigma_l^2 + 2 \times 5^2} = \pm \sqrt{3 \times 643 + 50} = \pm \sqrt{1979} = \pm 44.5\text{mm}$$

公職王歷屆試題 (110 高考三等)

五、直線方程式 $y = ax + b$ ，假設 x 為真值且觀測值 y 為等權獨立不相關，試由下列表格數據依最小二乘法估計 a 、 b 。(20 分)

x	1	2	3	4	5
y	10.3	11.2	11.8	11.7	12.0

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：間接觀測平差。重點提要：擬合曲線方程式。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第五章 間接觀測平差 之一、線性函數之誤差傳播與誤差估值

【擬答】

$$\text{觀測方程式} \begin{cases} 10.3 + v_1 = a + b \\ 11.2 + v_2 = 2a + b \\ 11.8 + v_3 = 3a + b \\ 11.7 + v_4 = 4a + b \\ 12.0 + v_5 = 5a + b \end{cases}, \text{改正數方程式} \begin{cases} v_1 = a + b - 10.3 \\ v_2 = 2a + b - 11.2 \\ v_3 = 3a + b - 11.8 \\ v_4 = 4a + b - 11.7 \\ v_5 = 5a + b - 12.0 \end{cases}$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 10.3 \\ 11.2 \\ 11.8 \\ 11.7 \\ 12.0 \end{bmatrix}, V = AX - L$$

組法方程式： $NX = U$ ， $N = A^T A$ ， $U = A^T L$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}, N^{-1} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 55 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10.3 \\ 11.2 \\ 11.8 \\ 11.7 \\ 12.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 174.9 \\ 57 \end{bmatrix}$$

$$X = N^{-1}U = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 174.9 \\ 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.39 \\ 10.23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \therefore a=0.39, b=10.23$$