110 年公務人員普通考試試題

類　科：測量製圖

科　目：測量平差法概要

甲、申論題部分：

一、使用某廠牌全站儀分四組觀測相同角度成果如下表所示，假設各組平均數之權與測回數成正比，試分析該角度的最或是值。（20 分）

組	測回數	平均數
1	5	120-15-21
2	3	120-15-23
3	2	120-15-19
4	3	120-15-16

【解題關鍵】

1.《考題難易》★

2.《破題關鍵》關鍵字：最或是值，加權平均。重點提要：權與測回數成正比。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第三章　直接觀測平差 之 二、不等精度（加權）直接觀測平差

【擬答】

已知：測回數 $n_1=5$，$n_2=3$，$n_3=2$，$n_4=3$

㈠計算權 P

權 P 與測回數 n 成正比，亦即 $P \propto n$，　$P_1:P_2:P_3:P_4=n_1:n_2:n_3:n_4=5:3:2:3$

權之和 $[\mathrm{P}]=\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_3+\mathrm{P}_4=5+3+2+3=13$

㈡計算最或是值：先計算秒數的最或是值

$$[P\cdot\theta]=P_1\cdot\theta_1+P_2\cdot\theta_2+P_3\cdot\theta_3+P_4\cdot\theta_4=5\times21+3\times23+2\times19+3\times16=260$$

$$\theta_o=\frac{[P\cdot\theta]}{[P]}=\frac{260}{13}=20''$$

∴ 該角度的最或是值 $=120°15'00''+\theta_o=120°15'00''+20''=120°15'20''$

二、水準測量測線長度 k 公里往返閉合差精度要求須在一定之容許範圍，一般均以 $\pm a\sqrt{k}$ mm 表示，因需求精度不同而規定不同之 a 值。設測線長度為 2km 時，允許之標準差為 ±14mm，在同一標準要求下，當測線長為 4km 時，則允許之誤差為若干？（20 分）

【解題關鍵】

1.《考題難易》★★

2.《破題關鍵》關鍵字：水準測量往返閉合差精度。重點提要：誤差傳播定律。

【命中特區】
書名：測量學 上課教材(2019 年版)
作者：賴明
章節出處：第二章　誤差傳播定律及其應用

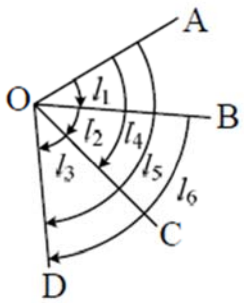
【擬答】

設：允許之標準差為σ，$\sigma=\pm a\sqrt{k}$

測線長度為 2 km 時，$\pm 14=\pm a\sqrt{2}$，$a=14/\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

測線長為 4 km 時，$\sigma=\pm 7\sqrt{2}\times\sqrt{4}=\pm 14\sqrt{2}mm$

三、自測站 O 向 A、B、C、D 四方向作等精度之水平角觀測（如圖所示），以間接觀測平差求∠AOB、∠BOC、∠COD 的最小平方估計值，試列出㈠設計矩陣㈡法係數矩陣（觀測方程式順序依序為 l_1、l_2、l_3、l_4、l_5、l_6，否則本題不計分）。（20 分）



【解題關鍵】
1.《考題難易》★★★
2.《破題關鍵》關鍵字：等權、間接觀測平差法。重點提要：設計矩陣、法係數矩陣。
【命中特區】
書名：測量學 上課教材(2019 年版)
作者：賴明
章節出處：第五章 間接觀測平差 之 二、等權間接觀測平差

【擬答】

假設：$\angle AOB=\ell_1+x_1$，$\angle BOC=\ell_2+x_2$，$\angle COD=\ell_3+x_3$

㈠設計矩陣

觀測方程式：

$$\begin{cases}\ell_1+v_1=\ell_1+x_1\\ \ell_2+v_2=\ell_2+x_2\\ \ell_3+v_3=\ell_3+x_3\\ \ell_4+v_4=(\ell_1+x_1)+(\ell_2+x_2)\\ \ell_5+v_5=(\ell_1+x_1)+(\ell_2+x_2)+(\ell_3+x_3)\\ \ell_6+v_6=(\ell_2+x_2)+(\ell_3+x_3)\end{cases}$$

改正數方程式：

$$\begin{cases} v_1 = x_1 \\ v_2 = x_2 \\ v_3 = x_3 \\ v_4 = x_1 + x_2 + (\ell_1 + \ell_2 - \ell_4) \\ v_5 = x_1 + x_2 + x_3 + (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - \ell_5) \\ v_6 = x_2 + x_3 + (\ell_2 + \ell_3 - \ell_6) \end{cases}$$

，矩陣式：$V = AX - L$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}，A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}，X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}，L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ell_4 - \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_5 - \ell_1 - \ell_2 - \ell_3 \\ \ell_6 - \ell_2 - \ell_3 \end{bmatrix}$$

(二)法係數矩陣：$NX = U$，$N = A^T A$，$U = A^T L$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} \times adj \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ell_4 - \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_5 - \ell_1 - \ell_2 - \ell_3 \\ \ell_6 - \ell_2 - \ell_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_4 + \ell_5 - 2\ell_1 - 2\ell_2 - \ell_3 \\ \ell_4 + \ell_5 + \ell_6 - 2\ell_1 - 3\ell_2 - 2\ell_3 \\ \ell_5 + \ell_6 - \ell_1 - 2\ell_2 - 2\ell_3 \end{bmatrix}$$

未知數矩陣 $X = N^{-1}U$

四、假設隨機變數 L_1、L_2、L_3，已知其變方－協變方矩陣為$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，求函數

$f=\frac{1}{3}L_1+\frac{5}{2}L_2+\frac{1}{4}L_3$ 的標準差。（20 分）

【解題關鍵】

1.《考題難易》★★★

2.《破題關鍵》關鍵字：標準差。重點提要：線性函數之誤差傳播。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第四章 多變量函數之誤差傳播 之 一、線性函數之誤差傳播與誤差估值

【擬答】

已知：$D_{LL}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，$\frac{\partial f}{\partial L_1}=\frac{\partial}{\partial L_1}\left(\frac{1}{3}L_1+\frac{5}{2}L_2+\frac{1}{4}L_3\right)=\frac{1}{3}$，

$\frac{\partial f}{\partial L_2}=\frac{\partial}{\partial L_2}\left(\frac{1}{3}L_1+\frac{5}{2}L_2+\frac{1}{4}L_3\right)=\frac{5}{2}$，$\frac{\partial f}{\partial L_3}=\frac{\partial}{\partial L_3}\left(\frac{1}{3}L_1+\frac{5}{2}L_2+\frac{1}{4}L_3\right)=\frac{1}{4}$

由多變量誤差傳播定律 得知

$$\left[\sigma_f^2\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\times D_{LL}\times\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{5}{2}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{5}{2}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{13}{12} & \frac{61}{6} & \frac{27}{4}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{5}{2}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3851}{144}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26.743\end{bmatrix}\quad\therefore \text{標準差}\ \sigma_f=\pm 5.17$$

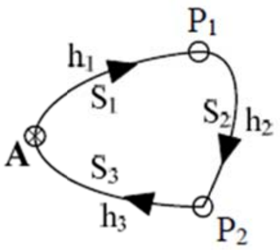
五、如圖閉合水準網中，點 A 為已知點，高程為 $H_A=10.000\text{m}$，P_1、P_2 為高程未知點。觀測高程差及路線長度分別為：

$h_1=1.352\text{m}$；$S_1=2\text{km}$

$h_2=-0.531\text{m}$；$S_2=2\text{km}$

$h_3=-0.826\text{m}$；$S_3=1\text{km}$

試以間接觀測平差求各高程差的平差值。（20 分）



【解題關鍵】

1.《考題難易》★★★

2.《破題關鍵》關鍵字：間接觀測平差法、非等權。重點提要：權與路線長度成反比。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第五章 間接觀測平差 之 三、加權（非等權）間接觀測平差

【擬答】

已知：水準路線長 S_i。H_A=10.000 m。未知量：H_{P_1}，H_{P_2}

觀測數 n=3，未知數 u=2，自由度 r=n-u=3-2=1。

設；H_{P_1}之初值 $H_{P_{1o}} = H_A + h_1 = 10.000 + 1.352 = 11.352m$

H_{P_2}之初值 $H_{P_{2o}} = H_A - h_3 = 10.000 - (-0.826) = 10.826m$

∴ 假設：$H_{P_1} = 11.352 + x_1$，$H_{P_2} = 10.826 + x_2$

㈠權 $P \propto \frac{1}{S}$，$P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{S_1} : \frac{1}{S_2} : \frac{1}{S_3} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{1}{1} = 1:1:2$

㈡觀測方程式 $\begin{cases} h_1 + v_1 = H_{P_1} - H_A \\ h_2 + v_2 = H_{P_2} - H_{P_1} \\ h_3 + v_3 = H_A - H_{P_2} \end{cases}$

㈢改正數方程式

$$\begin{cases} v_1 = H_{P_1} - H_A - h_1 \\ v_2 = H_{P_2} - H_{P_1} - h_2 \\ v_3 = H_A - H_{P_2} - h_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} v_1 = 11.352 + x_1 - 10.000 - 1.352 \\ v_2 = 10.826 + x_2 - (11.352 + x_1) - (-0.531) \\ v_3 = 10.000 - (10.826 + x_2) - (-0.826) \end{cases}$$

$\begin{cases} v_1 = x_1 \\ v_2 = x_2 - x_1 + 0.005 \\ v_3 = -x_2 \end{cases}$，如單位為 mm，則 $\begin{cases} v_1 = x_1 \\ v_2 = -x_1 + x_2 - (-5) \\ v_3 = -x_2 \end{cases}$

㈣以矩陣式表示：$V = AX - L$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

㈤組法方程式：$NX = U$，$N = A^T PA$，$U = A^T PL$

$$N=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ -5\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -5\end{bmatrix}$$

㈥計算反函數，得最佳估值 $X=N^{-1}U$

$$N^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}}\times\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}，X=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

㈦計算 P_1 和 P_2 點高程

$x_1=2mm=0.002m$ ， $x_2=-1mm=-0.001m$

$$H_{P_1}=11.352+x_1=11.352m+0.002m=11.354m$$

$$H_{P_2}=10.826+x_2=10.826m+(-0.001)m=10.825m$$

㈧計算各高程差的平差值

$v_1=x_1=2mm=0.002m$ ， $v_2=x_2-x_1+5=-1-2+5=2mm=0.002m$ ，

$v_3=-x_2=-(-1)=1mm=0.001m$

平差後的高程差：$h_1=1.352+0.002=1.354m$ ，$h_2=-0.531+0.002=-0.529m$

$h_3=-0.826+0.001=-0.825m$