

110 年公務人員普通考試試題

類 科：測量製圖

科 目：測量平差法概要

甲、申論題部分：

一、使用某廠牌全站儀分四組觀測相同角度成果如下表所示，假設各組平均數之權與測回數成正比，試分析該角度的最或是值。(20 分)

| 組 | 測回數 | 平均數 |
|---|-----|-----------|
| 1 | 5 | 120-15-21 |
| 2 | 3 | 120-15-23 |
| 3 | 2 | 120-15-19 |
| 4 | 3 | 120-15-16 |

志光學儒保成 工科人專屬學習規劃

精心安排完整豐富的上榜課程

工科考試所需要的資源，我們通通幫你準備好了

- 法科架構班**：學校沒教的，我們教給你！名師精解法科知識，結合實務例子，助你建構法科概念。
- 扎實正規班**：完整堂數規劃，循序漸進學習，讓您深度修習工科各專業學科知識。
- 作文實戰班**：作文再也不是理工人的痛！透過專業老師的輔導，快速強化您的寫作架構、邏輯概念。
- 主題題庫班**：主題式教學，搭配各類試題演練，進行考點分析及破題要點訓練，讓您短時間各科實力倍增。
- 精華總複習**：考前重點總複習，精準掌握重要考點，讓您考前實力突飛猛進。
- 考前提要關懷講座**：名師考前最終提點，穩定你累積許久的實力，讓你的觀念更加清晰。
- 全國全真模擬考**：檢視應考實力、訓練臨場反應、掌握最新考題趨勢，全程比照考試時程，模擬考場實戰氛圍，讓您能以平常心應考！
- 工科全科班**：公職+國營完善循環課程規劃，All in One課程一次到位，奠定穩固基礎、強化上榜實力。

109普考 電子工程 曾○維 一年考取

我是工科人，我工頂啦！

由於考試的題目非常靈活，參加題庫班，除了勤做考古題外，大量實作解說，很快速地強化我的考前記憶，每做一道題目馬上能判斷是在哪一章節，然後再進行解題。

■完整課程資訊詳洽全國志光·學儒·保成門市■

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★
2. 《破題關鍵》關鍵字：最或是值，加權平均。重點提要：權與測回數成正比。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第三章 直接觀測平差 之 二、不等精度（加權）直接觀測平差

【擬答】

已知：測回數 $n_1=5, n_2=3, n_3=2, n_4=3$

(一)計算權 P

權 P 與測回數 n 成正比，亦即 $P \propto n$ ， $P_1:P_2:P_3:P_4 = n_1:n_2:n_3:n_4 = 5:3:2:3$

權之和 $[P]=P_1+P_2+P_3+P_4=5+3+2+3=13$

(二)計算最或是值：先計算秒數的最或是值

$$[P \cdot \theta] = P_1 \cdot \theta_1 + P_2 \cdot \theta_2 + P_3 \cdot \theta_3 + P_4 \cdot \theta_4 = 5 \times 21 + 3 \times 23 + 2 \times 19 + 3 \times 16 = 260$$

$$\theta_o = \frac{[P \cdot \theta]}{[P]} = \frac{260}{13} = 20''$$

\therefore 該角度的最或是值 $= 120^\circ 15' 00'' + \theta_o = 120^\circ 15' 00'' + 20'' = 120^\circ 15' 20''$



為你專屬設計的學習模式，讓你靈活學習、輕鬆準備！
我們都在 志光學儒 保成 成功找到工科人的工頂人生

多元學習模式

- 面授學習**
 - 直接，有效**
 - 實際面對面教學，現場解決您的疑惑。
 - 優質專業名師，幫您統整、分析考試重點資訊。
 - 定期的大小測驗，您可隨時檢視學習效果。
- 雲端函授**
 - 自主，彈性**
 - 不用煩惱通勤問題，課程教材直接送到家。
 - 反覆聽課，不怕觀念聽不懂。
 - 完全自由，可自主安排學習進度。
- 視訊學習**
 - 便利，專注**
 - 安靜舒適的上課環境，提高您的專注力。
 - 看課時間能自由預約，無須擔心時間衝突。
 - 可依需求暫停、倒轉或快轉，深度學習超簡單。

專業名師指導，提升解題順暢度！
本以為適合開業，但發現穩定的生活才是我想要的。老師的教材都有明確分析與統整，再加上會由老師出中論題讓考生做練習，增加寫題目的敏感度及順暢度。考前還有總複習課程，精準預測範圍、統整考前重點。
全國探花 李○庭 109年鐵路員級機械工程

選對好老師，中年轉職好順利！
我遭逢公司裁員，覺得公職夠穩定，決定踏上國考之路。隔了20幾年重拾書本，選擇好的補習班讓我事半功倍。熱力學老師跟流體力學老師，我非常推崇，只要照著老師講的記下來、寫下來，這樣就夠了。
1年考取 古○芳 109年高考機械工程

題庫班老師的講解，對我幫助很大！
畢業後工作，累的要死薪水卻不怎麼樣。剛好朋友推薦鐵路特考，就挑戰看看。我覺得機械原理的題庫班對我幫助很大，跟著老師一起解，不懂的地方聽老師講解，覺得聽完很多疑問就會解開並且對我幫助很大。
優秀考取 謝○軒 109年鐵路佐級機械工程

二、水準測量測線長度 k 公里往返閉合差精度要求須在一定之容許範圍，一般均以 $\pm a\sqrt{k}$ mm 表示，因需求精度不同而規定不同之 a 值。設測線長度為 2km 時，允許之標準差為 ± 14 mm，在同一標準要求下，當測線長為 4km 時，則允許之誤差為若干？（20 分）

【解題關鍵】

- 《考題難易》★★
- 《破題關鍵》關鍵字：水準測量往返閉合差精度。重點提要：誤差傳播定律。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第二章 誤差傳播定律及其應用

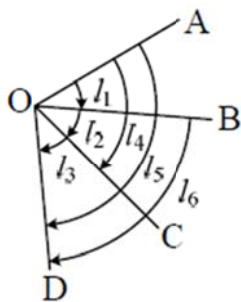
【擬答】

設：允許之標準差為 σ ， $\sigma = \pm a\sqrt{k}$

測線長度為 2 km 時， $\pm 14 = \pm a\sqrt{2}$ ， $a = 14/\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

測線長為 4 km 時， $\sigma = \pm 7\sqrt{2} \times \sqrt{4} = \pm 14\sqrt{2}mm$

三、自測站 O 向 A、B、C、D 四方向作等精度之水平角觀測（如圖所示），以間接觀測平差求 $\angle AOB$ 、 $\angle BOC$ 、 $\angle COD$ 的最小平方估計值，試列出(一)設計矩陣(二)法係數矩陣（觀測方程式順序依序為 l_1 、 l_2 、 l_3 、 l_4 、 l_5 、 l_6 ，否則本題不計分）。（20 分）



【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：等權、間接觀測平差法。重點提要：設計矩陣、法係數矩陣。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第五章 間接觀測平差 之二、等權間接觀測平差

【擬答】

假設： $\angle AOB = l_1 + x_1$ ， $\angle BOC = l_2 + x_2$ ， $\angle COD = l_3 + x_3$

(一)設計矩陣

觀測方程式：

$$\begin{cases} l_1 + v_1 = l_1 + x_1 \\ l_2 + v_2 = l_2 + x_2 \\ l_3 + v_3 = l_3 + x_3 \\ l_4 + v_4 = (l_1 + x_1) + (l_2 + x_2) \\ l_5 + v_5 = (l_1 + x_1) + (l_2 + x_2) + (l_3 + x_3) \\ l_6 + v_6 = (l_2 + x_2) + (l_3 + x_3) \end{cases}$$

改正數方程式：

$$\begin{cases} v_1 = x_1 \\ v_2 = x_2 \\ v_3 = x_3 \\ v_4 = x_1 + x_2 + (l_1 + l_2 - l_4) \\ v_5 = x_1 + x_2 + x_3 + (l_1 + l_2 + l_3 - l_5) \\ v_6 = x_2 + x_3 + (l_2 + l_3 - l_6) \end{cases}, \text{ 矩陣式： } V = AX - L$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ l_4 - l_1 - l_2 \\ l_5 - l_1 - l_2 - l_3 \\ l_6 - l_2 - l_3 \end{bmatrix}$$

(二)法係數矩陣： $NX = U$ ， $N = A^T A$ ， $U = A^T L$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} \times \text{adj} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ l_4 - l_1 - l_2 \\ l_5 - l_1 - l_2 - l_3 \\ l_6 - l_2 - l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_4 + l_5 - 2l_1 - 2l_2 - l_3 \\ l_4 + l_5 + l_6 - 2l_1 - 3l_2 - 2l_3 \\ l_5 + l_6 - l_1 - 2l_2 - 2l_3 \end{bmatrix}$$

未知數矩陣 $X = N^{-1}U$

四、假設隨機變數 L_1 、 L_2 、 L_3 ，已知其變方—協變方矩陣為 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ，求函數

$$f = \frac{1}{3}L_1 + \frac{5}{2}L_2 + \frac{1}{4}L_3 \text{ 的標準差。 (20 分)}$$

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：標準差。重點提要：線性函數之誤差傳播。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第四章 多變量函數之誤差傳播 之一、線性函數之誤差傳播與誤差估值

【擬答】

$$\text{已知： } D_{LL} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \frac{\partial f}{\partial L_1} = \frac{\partial}{\partial L_1} \left(\frac{1}{3}L_1 + \frac{5}{2}L_2 + \frac{1}{4}L_3 \right) = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial L_2} = \frac{\partial}{\partial L_2} \left(\frac{1}{3}L_1 + \frac{5}{2}L_2 + \frac{1}{4}L_3 \right) = \frac{5}{2}, \frac{\partial f}{\partial L_3} = \frac{\partial}{\partial L_3} \left(\frac{1}{3}L_1 + \frac{5}{2}L_2 + \frac{1}{4}L_3 \right) = \frac{1}{4}$$

由多變量誤差傳播定律 得知

$$\begin{aligned} \left[\sigma_f^2 \right] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \times D_{LL} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{13}{12} & \frac{61}{6} & \frac{27}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3851 \\ 144 \end{bmatrix} = [26.743] \therefore \text{標準差 } \sigma_f = \pm 5.17 \end{aligned}$$

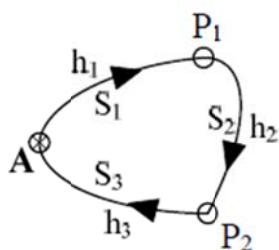
五、如圖閉合水準網中，點 A 為已知點，高程為 $H_A = 10.000\text{m}$ ， P_1 、 P_2 為高程未知點。觀測高程差及路線長度分別為：

$$h_1 = 1.352\text{m} ; S_1 = 2\text{km}$$

$$h_2 = -0.531\text{m} ; S_2 = 2\text{km}$$

$$h_3 = -0.826\text{m} ; S_3 = 1\text{km}$$

試以間接觀測平差求各高程差的平差值。(20 分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：間接觀測平差法、非等權。重點提要：權與路線長度成反比。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材(2019 年版)

作者：賴明

章節出處：第五章 間接觀測平差 之 三、加權（非等權）間接觀測平差

【擬答】

已知：水準路線長 S_i 。 $H_A=10.000\text{ m}$ 。未知量： H_{P_1} ， H_{P_2} 觀測數 $n=3$ ，未知數 $u=2$ ，自由度 $r=n-u=3-2=1$ 。設： H_{P_1} 之初值 $H_{P_{1_0}} = H_A + h_1 = 10.000 + 1.352 = 11.352\text{ m}$ H_{P_2} 之初值 $H_{P_{2_0}} = H_A - h_3 = 10.000 - (-0.826) = 10.826\text{ m}$ \therefore 假設： $H_{P_1} = 11.352 + x_1$ ， $H_{P_2} = 10.826 + x_2$ (一) 權 $P \propto \frac{1}{S}$ ， $P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{S_1} : \frac{1}{S_2} : \frac{1}{S_3} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{1}{1} = 1 : 1 : 2$ (二) 觀測方程式
$$\begin{cases} h_1 + v_1 = H_{P_1} - H_A \\ h_2 + v_2 = H_{P_2} - H_{P_1} \\ h_3 + v_3 = H_A - H_{P_2} \end{cases}$$

(三) 改正數方程式

$$\begin{cases} v_1 = H_{P_1} - H_A - h_1 \\ v_2 = H_{P_2} - H_{P_1} - h_2 \\ v_3 = H_A - H_{P_2} - h_3 \end{cases}, \begin{cases} v_1 = 11.352 + x_1 - 10.000 - 1.352 \\ v_2 = 10.826 + x_2 - (11.352 + x_1) - (-0.531) \\ v_3 = 10.000 - (10.826 + x_2) - (-0.826) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = x_1 \\ v_2 = x_2 - x_1 + 0.005 \\ v_3 = -x_2 \end{cases}, \text{如單位為 } mm, \text{ 則} \begin{cases} v_1 = x_1 \\ v_2 = -x_1 + x_2 - (-5) \\ v_3 = -x_2 \end{cases}$$

(四) 以矩陣式表示： $V = AX - L$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(五) 組法方程式： $NX = U$ ， $N = A^T P A$ ， $U = A^T P L$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

(六) 計算反函數，得最佳估值 $X = N^{-1}U$

$$N^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(七) 計算 P_1 和 P_2 點高程

$$x_1 = 2mm = 0.002m, \quad x_2 = -1mm = -0.001m$$

$$H_{P_1} = 11.352 + x_1 = 11.352m + 0.002m = 11.354m$$

$$H_{P_2} = 10.826 + x_2 = 10.826m + (-0.001)m = 10.825m$$

(八) 計算各高程差的平差值

$$v_1 = x_1 = 2mm = 0.002m, \quad v_2 = x_2 - x_1 + 5 = -1 - 2 + 5 = 2mm = 0.002m,$$

$$v_3 = -x_2 = -(-1) = 1mm = 0.001m$$

$$\text{平差後的高程差：} h_1 = 1.352 + 0.002 = 1.354m, \quad h_2 = -0.531 + 0.002 = -0.529m$$

$$h_3 = -0.826 + 0.001 = -0.825m$$