110 年公務人員高等考試三級考試試題

類科：機械工程

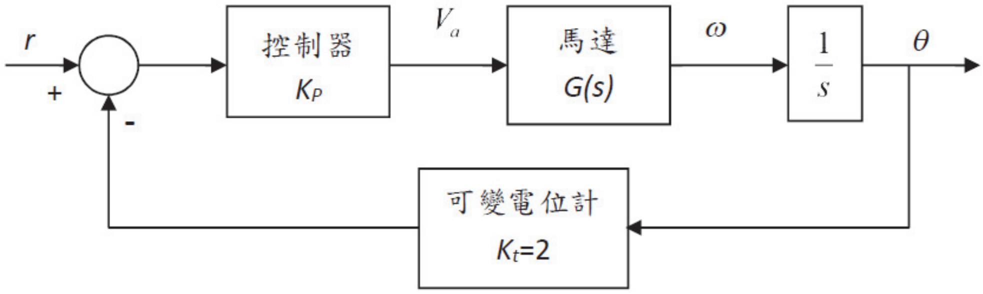
科目：自動控制

陳銘老師

一、如下圖馬達控制系統，受控馬達之轉移函數$G(s)=\dfrac{10}{0.1\,s+1}$，其輸入為電樞電壓，輸出為轉速。馬達角度由一可變電位計量測，其轉移函數為 K_t=2V/rad。

㈠僅使用比例控制，設計 K_P 以使系統之阻尼比為 0.5，此時系統之自然頻率為何？此系統進行定位控制與定速控制時，分別能否達到穩態誤差為零的要求？請說明其原因。(15 分)

㈡若使用者要求系統自然頻率至少須為 20 rad/sec 且阻尼比維持 0.5，試提出新的控制器設計以達其要求。(10 分)



1.《考題難易》★★★：普通
2.《破題關鍵》：瞭解特性方程式阻尼比與自然頻率關係即可寫出

【擬答】

㈠$G(s)=\dfrac{10}{0.1s+1}=\dfrac{100}{s+10}$，$G'(s)=\dfrac{100K_P}{s(s+10)}$

$$\frac{\theta}{r}=\frac{\dfrac{100K_P}{s(s+10)}}{1+\dfrac{100K_P}{s(s+10)}\times 2}=\frac{100K_P}{s^2+10s+200K_P}$$

特性方程式為$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=s^2+2\times0.5\times\omega_n s+\omega_n^2=s^2+10s+200K_P$

則$\omega_n=10;\omega_n^2=100=200K_P\Rightarrow K_P=0.5$

單位增益下的$G''=\dfrac{\dfrac{100K_P}{s(s+10)}}{1+\dfrac{100K_P}{s(s+10)}}=\dfrac{100K_P}{s^2+10s+100K_P}$，為 Type 0

定位控制：$e_{SS}=\dfrac{U}{1+\lim\limits_{s\to0}\dfrac{100K_P}{s^2+10s+100K_P}}=\dfrac{U}{2}=const$

定速控制：$e_{SS}=\dfrac{R}{\lim\limits_{s\to0}s\times\dfrac{100K_P}{s^2+10s+100K_P}}=\infty$

無法達到穩態誤差為零的要求。

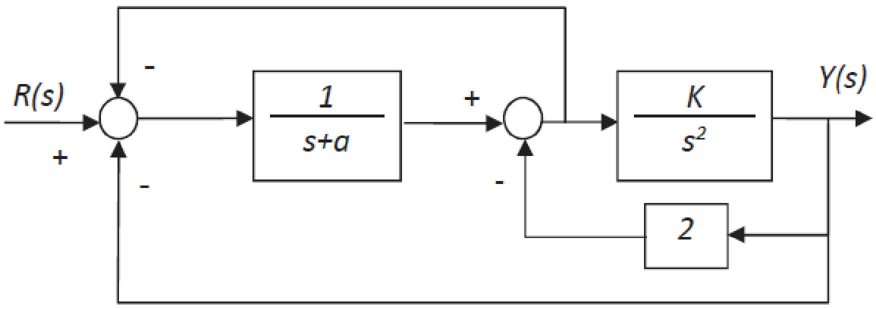
(二)控制器使用 K_P+K_Ds ，則

$$\frac{\theta}{r}=\frac{\dfrac{100(K_P+K_Ds)}{s(s+10)}}{1+\dfrac{100(K_P+K_Ds)}{s(s+10)}\times 2}=\frac{100(K_P+K_Ds)}{s^2+10s+200(K_P+K_Ds)}=\frac{100(K_P+K_Ds)}{s^2+(10+200K_D)s+200K_P}$$

特性方程式為 $s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=s^2+2\times0.5\times20s+20^2=s^2+20s+400$

則 $s^2+(10+200K_D)s+200K_P=s^2+20s+400\Rightarrow K_D=0.05;K_P=2$

二、考慮下圖之控制系統，a 與 K 為待設計之控制參數，試化簡方塊圖以求得轉移函數 $\frac{Y(s)}{R(s)}$，並判斷能使系統穩定之 a 與 K 之條件。此系統之直流增益對 K 的靈敏度為何？對 a 的靈敏度在何條件下為最高？(25 分)



1.《考題難易》★★★：普通
2.《破題關鍵》：使用 R-H 表格求得穩定度條件與熟悉靈敏度定義

【擬答】

(一) $$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{K}{s^2(s+a)}}{1-\left[-\dfrac{1}{s+a}-\dfrac{2K}{s^2}-\dfrac{K}{s^2(s+a)}\right]}=\frac{\dfrac{K}{s^2(s+a)}}{\dfrac{s^2(s+a)+s^2+2K(s+a)+K}{s^2(s+a)}}=\frac{K}{s^3+(a+1)s^2+2Ks+K(2a+1)}$$

(二)使用 Routh-Hurwit 表如下

s^3	1	2K
s^2	a+1	$K(2a+1)$
s^1	$\dfrac{K}{a+1}$	
s^0	$K(2a+1)$	

$a+1>0\Rightarrow a>-1$ ；$\dfrac{K}{a+1}>0\Rightarrow K>0$ ；$K(2a+1)>0\Rightarrow a>-\dfrac{1}{2}$

$\therefore K>0;a>-\dfrac{1}{2}$

(三)系統的直流增益為 $\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{K}{s^3+(a+1)s^2+2Ks+K(2a+1)}\Big|_{s=0}=\dfrac{1}{2a+1}$

$$S_{T,a}=\frac{a}{\frac{1}{2a+1}}\frac{d}{da}\left[\frac{1}{2a+1}\right]=a(2a+1)\times\left[-\frac{2}{(2a+1)^2}\right]=-\frac{2a}{2a+1}=-1+\frac{1}{2a+1}$$

在 $a=-\frac{1}{2}$ 靈敏度為最高

$$S_{T,K}=\frac{K}{\frac{K}{s^3+(a+1)s^2+2Ks+K(2a+1)}}\frac{d}{dK}\left[\frac{K}{s^3+(a+1)s^2+2Ks+K(2a+1)}\right]$$

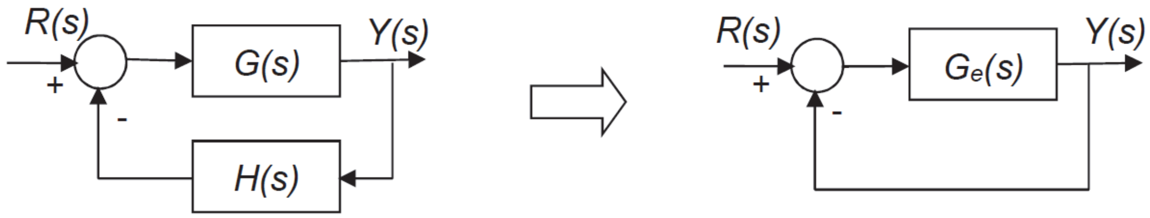
則

$$S_{T,K}=\frac{K}{\frac{1}{2a+1}}\frac{d}{dK}\left[\frac{1}{2a+1}\right]=0$$

三、如下圖左方之控制系統架構，$G(s)=\frac{1}{s^2+6s+20}$，與$H(s)=\frac{-19}{s+1}$ 。

㈠為判斷系統型態，請計算系統於單位負回授下之等效轉移函數 $G_e(s)$，如下圖右方，並據以判定系統型態為何。(15 分)

㈡請使用漸近線（asymptote）技術繪出 $G_e(s)$之近似波德圖之大小增益部分（無須繪製相位圖）。（10 分）



1.《考題難易》★★★：普通
2.《破題關鍵》：瞭解波德圖的畫法即可求出

【擬答】

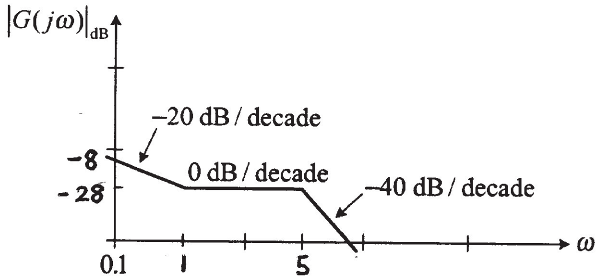
㈠$H'(s)=\frac{-19}{s+1}-1=\frac{-s-20}{s+1}$

$$G_e(s)=\frac{\frac{1}{s^2+6s+20}}{1+\frac{1}{s^2+6s+20}\times\frac{-s-20}{s+1}}=\frac{s+1}{(s^2+6s+20)(s+1)-s-20}=\frac{s+1}{s^3+7s^2+25s}=\frac{s+1}{s(s^2+7s+25)}$$

系統型態為 type 1

㈡標準化$G_e(s)=\dfrac{\frac{1}{25}\times\left(1+\frac{s}{1}\right)}{s\left(1+\frac{7s}{25}+\frac{s^2}{25}\right)}$

$$\omega=0.1\Rightarrow 20\log\left(\frac{\frac{1}{25}}{0.1}\right)=-8dB$$



四、單位負回授之架構下，一系統之轉移函數為 $G(s)=\dfrac{32}{s(s^2+4s-28)}$，若欲設計一 PD 控制器 $C(s)$ $(1+Ks)$ 以進行補償，請畫出閉路系統之根針對 K 值變化而產生之根軌跡，並說明為何無論 K 之值為何，此系統皆無法穩定。(25 分)

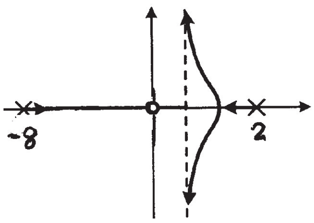
1.《考題難易》★★★：普通
2.《破題關鍵》：瞭解根軌跡的畫法即可求出

【擬答】

閉回路特性方程式為 $s\left(s^2+4s-28\right)+32Ks+32=0\Rightarrow\left(s^3+4s^2-28s+32\right)+32Ks=0$

$$1+K\frac{32s}{s^3+4s^2-28s+32}=0\Rightarrow G(s)=\frac{s}{(s-2)^2(s+8)}$$

極點分別為：s＝2,2,-8 共 3 個極點，而零點則為 0。



無論 K 為何值，此系統皆無法穩定。