

110 年特種考試地方政府公務人員考試試題

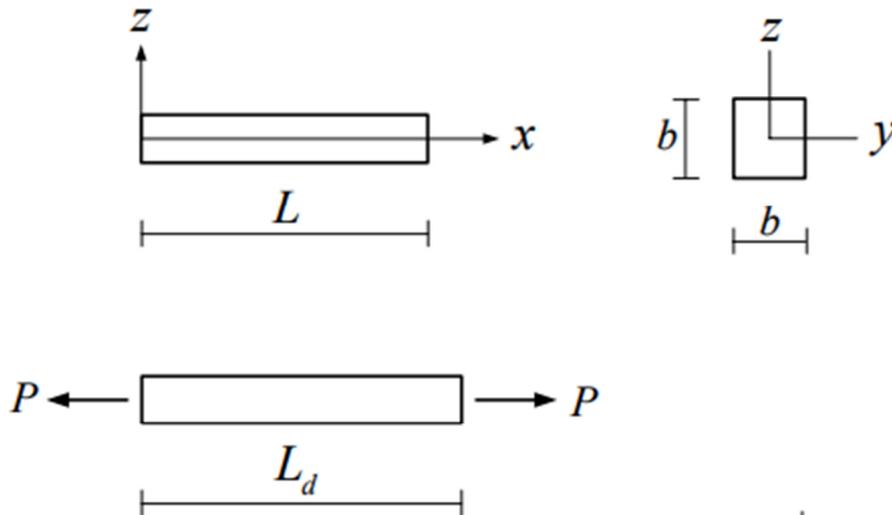
等 別：三等考試

類 科：土木工程

科 目：靜力學與材料力學

李桀/簡立強老師解題

- 一、正方形斷面桿件如下圖所示，(無外力作用)桿件未變形軸向長度 $L=1250\text{mm}$ 、正方形斷面邊長 $b=50\text{mm}$ 。當承受軸拉力 $P=400\text{kN}$ ，桿件變形後軸向長度 $L_d=1251\text{mm}$ 、正方形斷面邊長縮短為 49.99mm ，求此時桿件軸向應力 σ_x 、正向應變 ϵ_x 及 ϵ_y 、蒲松比 ν 、桿件最大剪應力及最大剪應變。(25 分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★

2. 《破題關鍵》

- 題型由軸向桿件的拉力實驗相關數據，求取材料的力學性質。
- 先以力學性質定義由題意給定的數據求得可計算的變數，如應變等。
- 彈性模數由軸向桿件變形公式求得。

【擬答】

桿件軸向變形

$$\delta_d = 1251 - 1250 = 1 \text{ mm}$$

桿件側向變形

$$\delta_y = 49.99 - 50 = -0.01 \text{ mm}$$

桿件軸向應變

$$\epsilon_x = 1/1250 = 8 \times 10^{-4}$$

桿件側向應變

$$\epsilon_y = -\frac{0.01}{50} = -2 \times 10^{-4}$$

由桿件軸向變形求得彈性模數

$$\delta_d = \frac{PL}{AE} \Rightarrow E = \frac{PL}{A\delta_d} = \frac{400 \times 1250}{50^2 \times 1} = 200 \text{ kN/mm}^2 = 200 \text{ GPa}$$

蒲松比 $\nu = -\frac{\text{側向應變}}{\text{軸向應變}}$

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{-2 \times 10^{-4}}{8 \times 10^{-4}} = 0.25$$

剪力彈性模數

公職王歷屆試題 (110 地方政府特考)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0.25)} = 80 \text{ GPa}$$

桿件軸向(正向)應力

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = 200 \times 10^3 \times 8 \times 10^{-4} = 160 \text{ MPa}$$

單軸正向應力，最大剪應力 $\tau_{max} = 1/2 \sigma_x$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \times 160 = 80 \text{ MPa}$$

最大剪應變

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{80}{80 \times 10^3} = 0.001 \text{ rad}$$

答：(a) 桿件軸向應力 $\sigma_x = 160 \text{ MPa}$ (拉應力)

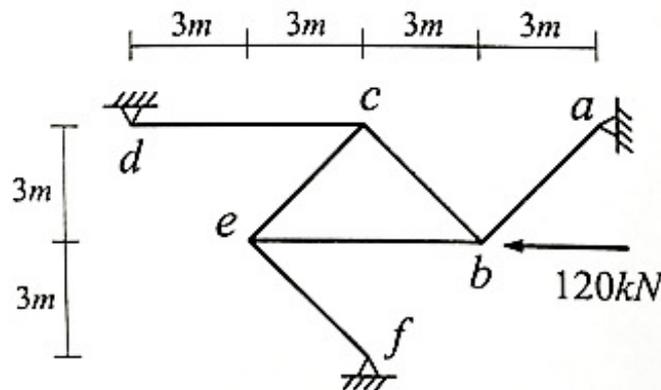
(b) 正向應變 $\varepsilon_x = 8 \times 10^{-4}$ 、 $\varepsilon_y = 4 \times 10^{-4}$

(c) 蒲松比 $\nu = 0.25$

(d) 桿件最大剪應力 $\tau_{max} = 80 \text{ MPa}$

(e) 最大剪應變 $\gamma_{max} = 0.001 \text{ rad}$

二、如下圖所示之平面桁架結構， a 點、 d 點及 f 為鉸支承， b 點承受水平集中載重 120 kN ，求 ab 、 cd 及 ef 桿件的軸力。(25 分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》 中等：★★★☆☆

2. 《破題關鍵》

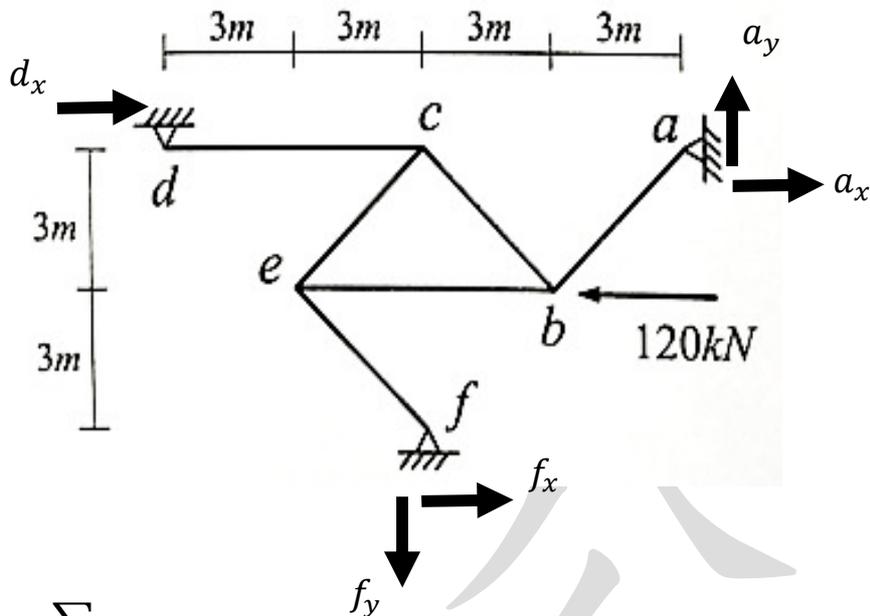
(1) 桿件 cd 為二力桿件，所以 d 支承沒有 y 方向的力量。

(2) 自行假設各支承力量的方向。

3. 《命中特區》正課班靜力學講義 P5 - 20

【擬答】

(一) 假設各支承力量的方向



$$\sum M_a = 0$$

$$120(3) = f_x(6) + f_y(6) \dots \dots (1)$$

(二)取ef自由體

$$\sum M_e = 0$$

$$f_x(3) = f_y(3) \dots \dots (2)$$

由(1)(2)解聯立

$$f_x = 30(kN)(\rightarrow) \quad f_y = 30(kN)(\downarrow)$$

(三)節點f力平衡

$$S_{ef} = 30\sqrt{2}(kN)(拉)$$

(四)整體y方向力平衡

$$\sum F_y = 0$$

$$a_y = f_y = 30(kN)(\uparrow)$$

(五)取ab自由體

$$\sum M_b = 0$$

$$a_y(3) = a_x(3)$$

$$a_x = 30(kN)(\rightarrow)$$

(六)節點a力平衡

$$S_{ab} = 30\sqrt{2}(kN)(拉)$$

(七)整體x方向力平衡

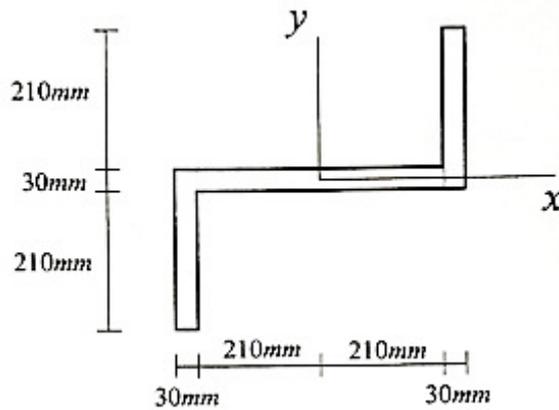
$$d_x + f_x + a_x = 120$$

$$d_x = 60(kN)(\rightarrow)$$

(八)節點d力平衡

$$S_{cd} = 60(kN)(壓)$$

三、梁桿件斷面如下圖所示，求此斷面的慣性矩 I_x 、 I_y 。(25 分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》 易：★☆☆☆☆
2. 《破題關鍵》
繞底邊或是繞形心軸的 I 值基本計算。
3. 《命中特區》正課班靜力學講義P6-8

【擬答】

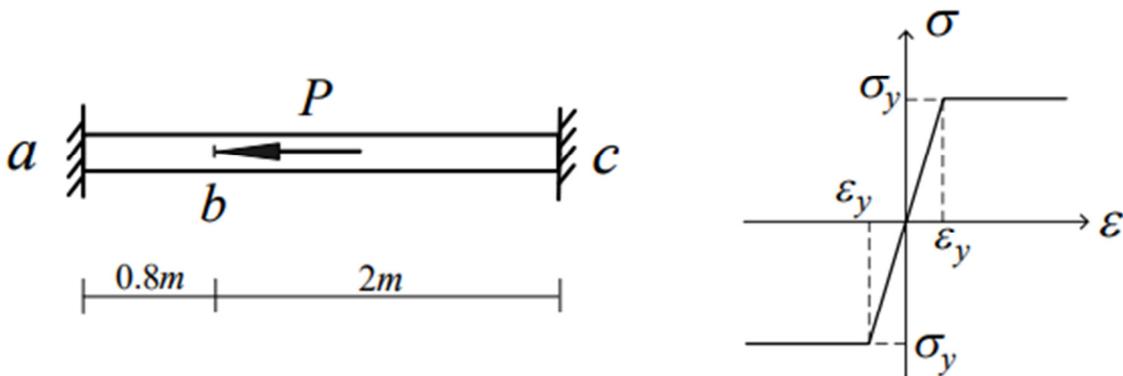
(一)利用繞形心軸來計算 I_x

$$I_x = \frac{1}{12}(450)(30)^3 + \frac{1}{12}(30)(450)^3 = 228825000(mm^4)$$

(二)利用繞形心軸來計算 I_y

$$I_y = \frac{1}{12}(240)(480)^3 - \frac{1}{12}(210)(420)^3 = 915300000(mm^4)$$

四、均質材料桿件，材料之應力應變關係如右下圖所示，圖中降伏應力 $\sigma_y=250MPa$ 、降伏應變 $\epsilon_y=0.00125$ ，桿件斷面積 $A=8cm^2$ ，a點及c點為固定端。當b點承受軸向水平外力 $P=360kN$ 作用，已知此時ab桿件已經降伏，求bc桿件軸向應力及軸向應變、b點軸向位移、ab桿件軸向及其應變能。(25分)



【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★
2. 《破題關鍵》
 - a. 由題意知ab桿件已經降伏，ab桿件的軸力為已知值，桿件由一次靜不定結構轉為靜定結構，bc桿件軸力可依靜力平衡求得。
 - b. 彈性模數由降伏應力及應變線性比例求得。

c. ab 桿件的應變能可由應力應變曲線下含蓋的面積求得單位體積應變能 u ，再將 u 乘上桿件體積求得 ab 桿件的應變能。

【擬答】

ab 桿件已經降伏，所以 $\sigma_{ab} = \sigma_y = 250 \text{ MPa}$

此時 ab 桿件的軸力 $P_{ab} = \sigma_{ab}A = 250 \times 800 \times 10^{-3} = 200 \text{ kN}$ (壓力)

由力平衡

$$P_{ab} + P_{bc} = P \Rightarrow P_{bc} = 360 - 200 = 160 \text{ kN}(\text{拉力})$$

bc 桿件軸向應力

$$\sigma_{bc} = \frac{P_{bc}}{A} = \frac{160 \times 10^3}{8 \times 10^2} = 200 \text{ MPa}$$

材料彈性模數

$$E = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = \frac{250}{0.00125} = 200 \text{ GPa}$$

bc 桿件軸向應變

$$\varepsilon_{bc} = \frac{\sigma_{bc}}{E} = \frac{200}{200 \times 10^3} = 0.001$$

b 點軸向位移量等於 bc 桿件的變形量

$$\Delta_b = \delta_{bc} = L_{bc}\varepsilon_{bc} = 2 \times 10^{-3} \times 0.001 = 2 \text{ mm}(\leftarrow)$$

ab 桿件軸向應變

$$\varepsilon_{ab} = \frac{\Delta_b}{L_{ab}} = \frac{2}{0.8 \times 10^3} = 0.0025 > \varepsilon_y = 0.00125$$

ab 桿件單位體積應變能等於應力應變曲線下含蓋的面積

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y + \sigma_y(\varepsilon_{ab} - \varepsilon_y) = \frac{1}{2} \times 250 \times 0.00125 + 250 \times (0.0025 - 0.00125) \\ &= 0.46875 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

ab 桿件等於單位體積應變能乘上桿件體積

$$U = u \times V = 0.46875 \times 800 \times 0.8 \times 10^3 = 300000 \text{ N} \cdot \text{mm} = 300 \text{ N} \cdot \text{m} = 300 \text{ 焦耳}$$

答：(a)bc 桿件軸向應力 $\sigma_{bc} = 200 \text{ MPa}$ (拉應力)

(b) bc 桿件軸向應變 $\varepsilon_{bc} = 0.001$ (拉應變)

(c)b 點軸向位移 $\Delta_b = 2 \text{ mm}(\leftarrow)$

(d)ab 桿件軸向應變 $\varepsilon_{ab} = 0.0025$ (壓應變)

(e) ab 桿件軸向應變能 $U = 300 \text{ 焦耳}$