

## 110 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試

類 科：統計

科 目：迴歸分析

一、下表為中華民國 110 年 10 月底人口數、性別比例及人口密度統計表。

縣市	土地面積 (平方公里)	人口數			性別比例 (每百女子 所當男子 數)	人口密度 (每平總計 方公里人口 數)
		總計	男	女		
新北市	2,052.57	4,014,869	1,960,442	2,054,427	95.43	1,956.02
臺北市	271.7997	2,538,299	1,208,385	1,329,914	90.86	9,338.86
桃園市	1,220.95	2,272,663	1,125,386	1,147,277	98.09	1,861.38
臺中市	2,214.90	2,815,477	1,382,072	1,433,405	96.42	1,271.15
臺南市	2,191.65	1,864,799	928,682	936,117	99.21	850.86
高雄市	2,951.85	2,749,293	1,355,140	1,394,153	97.20	931.38
宜蘭縣	2,143.63	451,175	227,222	223,953	101.46	210.47
新竹縣	1,427.54	574,806	293,417	281,389	104.27	402.66
苗栗縣	1,820.31	538,940	277,786	261,154	106.37	296.07
彰化縣	1,074.40	1,257,033	638,686	618,347	103.29	1,169.99
南投縣	4,106.44	485,983	248,298	237,685	104.47	118.35
雲林縣	1,290.83	671,182	346,966	324,216	107.02	519.96
嘉義縣	1,903.64	494,293	256,417	237,876	107.79	259.66
屏東縣	2,775.60	805,717	410,328	395,389	103.78	290.29
臺東縣	3,515.25	213,718	109,715	104,003	105.49	60.80
花蓮縣	4,628.57	321,971	162,726	159,245	102.19	69.56
澎湖縣	126.8641	106,147	54,656	51,491	106.15	836.7
基隆市	132.7589	364,766	181,861	182,905	99.43	2,747.58
新竹市	104.1526	452,844	223,672	229,172	97.60	4,347.89
嘉義市	60.0256	265,208	128,102	137,106	93.43	4,418.25
金門縣	151.656	141,180	70,367	70,813	99.37	930.92
連江縣	28.8	13,516	7,822	5,694	137.37	469.31

若性別比例為  $X$ ，人口密度為  $Y$ ，且  $\sum X=2,256.69$ 、 $\sum Y=33,358.11$ 、 $\sum X^2=233,202.3$ 、 $\sum Y^2=147,581,075$  及  $\sum XY=3,226,744$ ，計算性別比例與人口密度之相關係數。(10 分)

解題關鍵

1. 《考題難易》：★

2. 《破題關鍵》：表格雖然很龐大，但題目有給綜合統計量，建議採用題目提供的訊息來計算相關係數，屬課內基本題。

【擬答】

$$SS_{XY} = \sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n} = 3226744 - \frac{2256.69 \times 33358.11}{22} = -195024.7844$$

$$SS_X = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n} = 233202.3 - \frac{(2256.69)^2}{22} = 1718.220177$$

$$SS_Y = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n} = 147581075 - \frac{(33358.11)^2}{22} = 97000915.78$$

$$r_{XY} = \frac{SS_{XY}}{\sqrt{SS_X SS_Y}} = \frac{-195024.7844}{\sqrt{1718.220177 \times 97000915.78}} = -0.4777$$

志光 × 保成 × 學儒 高普考 · 地方特考

# 奪榜特訓班

就是要找有上榜決心的您

**快速考取**

完整規劃  
嚴格執行

十大課程特色

集中管理	固定劃位	按表操課
學員須遵守奪榜特訓班管理辦法，徹底執行點名，嚴格管理。	一人一位，嚴格規定每日作息時間，幫助同學朝上榜前進。	針對每個科目規劃複習進度表，讓你有效率的執行時間管理。
全面檢視	三大會考	申論指導
針對學習課程，規劃進度檢視考、課後考、全範圍複習考。	比照國考日程考試，體驗國考臨場感，提升應考實力。	傳授申論題高分答題與寫作技巧，迅速提升作答能力。
專屬課輔	弱科加強	佳作觀摩
專屬課輔導師，針對應考科目或測驗內容，提供解答與指導。	針對命題焦點密集授課強迫記憶，弱科強效提高20-60分。	定期公布奪榜特訓班學生申論佳作，可學習他人寫作長處。
		選擇精熟
		訓練縮短作答時間，測驗後做課後檢討，助您短時間內精熟選擇題。

■ 完整課程資訊詳洽全國志光 · 保成 · 學儒門市 ■

二、依題一的資料，以人口密度作為反應變數，其他皆為解釋變數進行迴歸模型分析，得到以下參數估計結果：

	Estimate	Std error
(Intercept)	10,890.376	3,076.995
土地面積	-0.550	0.178
人口數 總計	0.053	0.0101
人口數 男	-0.110	0.022
人口數 女	NA	NA
性別比例	-76.789	28.760

- (一)參數估計表中之「NA」表示估計結果是不可得到的；詳述「人口數 女」之參數估計結果為「NA」之原因。(5分)
- (二)詳述「土地面積」之迴歸係數估計值的意義。(5分)
- (三)在顯著水準為 0.01 下，檢定各解釋變數之顯著性；並依此結果決定那些變數可被剔除。(10分)

**解題關鍵**

1. 《考題難易》：★
2. 《破題關鍵》：k 個分類僅需 k-1 個虛擬變項的觀念在 103 年普考經建行政考卷中有命題，可參考王瑋 迴歸分析 P. 7-156 頁完全相同範例。迴歸係數估計值的解

## 【擬答】

(一)「人口數 男」與「人口數 女」為完全相依的變項，因為男生女生相加即為總人口數，所以當兩者同時放入模式中，便產生了線性重合的問題，此模型正規方程式有五個等式，卻要求出六個估計式，故無法求出估計值，

(二)土地面積之迴歸係數估計值為-0.55，代表每增加一平方公里土地面積，人口密度便會減少 0.55 人/平方公里。

$$(三) 1. H_0: \beta_1 = 0 \quad H_1: \beta_1 \neq 0$$

$$\alpha = 0.01$$

$$T^* = \frac{\hat{\beta}_1}{S(\hat{\beta}_1)} = \frac{-0.55}{0.178} = -3.09 \in C$$

$$C: \{|T^*| > t_{0.005}(16) = 2.921\}$$

拒絕  $H_0$ ，有顯著證據說，在有其他變項下需要加入此變項，所以「土地面積」不需要刪除。

$$2. H_0: \beta_2 = 0 \quad H_1: \beta_2 \neq 0$$

$$\alpha = 0.01$$

$$T^* = \frac{\hat{\beta}_2}{S(\hat{\beta}_2)} = \frac{0.053}{0.0101} = 5.25 \in C$$

$$C: \{|T^*| > t_{0.005}(16) = 2.921\}$$

拒絕  $H_0$ ，有顯著證據說，在有其他變項下需要加入此變項，所以「人口數 總計」不需要刪除。

$$3. H_0: \beta_3 = 0 \quad H_1: \beta_3 \neq 0$$

$$\alpha = 0.01$$

$$T^* = \frac{\hat{\beta}_3}{S(\hat{\beta}_3)} = \frac{-0.11}{0.022} = -5 \in C$$

$$C: \{|T^*| > t_{0.005}(16) = 2.921\}$$

拒絕  $H_0$ ，有顯著證據說，在有其他變項下需要加入此變項，所以「人口數 男」不需要刪除。

$$4. H_0: \beta_4 = 0 \quad H_1: \beta_4 \neq 0$$

$$\alpha = 0.01$$

$$T^* = \frac{\hat{\beta}_4}{S(\hat{\beta}_4)} = \frac{-76.789}{28.76} = -2.67 \notin C$$

$$C: \{|T^*| > t_{0.005}(16) = 2.921\}$$

不拒絕  $H_0$ ，沒有顯著證據說，在有其他變項下需要加入此變項，所以「性別比例」可以刪除。



志光 × 保成 × 學儒

# 高普考 金榜輔考課程

<b>基礎課</b>	<b>正規課</b>	<b>專題課</b>
基礎架構課程協助考生建立基礎，以簡易的體系架構，理解各類科法令大綱，有助日後各類科學習。	開課時間依照各科目學習關聯性作安排，由淺入深教學、循序漸進的授課模式，讓同學完整學習、快速考取。	考前要拿高分除了理論內容熟記外，在答題上再加入新的時事見解，藉此提高分數，增加上榜機會。
<b>題庫班</b>	<b>奪榜班/特訓班</b>	<b>總複習</b>
以題目帶觀念方式授課，將題目進行整合連貫的剖析，強化同學作答技巧的提升！達到舉一反三之效。 <span style="color: red;">【自費加選】</span>	成績診斷分析→複習計劃擬定→隨堂小考檢視→弱科加強課程→駐班輔導老師—全真模擬考試。 <span style="color: red;">【自費加選】</span>	考前關鍵時刻，由授課老師精心篩選並分析考前重要考點補充，以地毯式重點整理給各位同學。



**吳○儀 109 高考金融保險 全國第九名**

我選擇面授課程上課，因為可以直接面對老師，讓我比較專心，而且事後遇到問題，也可以在下課時候問老師。我有參加題庫班，可以在考前加強複習，尤其是會計，老師會收集各種考題，對考試非常有幫助。

■ 完整課程資訊詳洽全國志光·保成·學儒門市 ■

三、依題二的迴歸模型分析，得到以下變異數分析 (Analysis of variance, ANOVA) 表：

Source of variation	Degrees of freedom	Sum of squares	Mean square	F
Regression	(1)	(4)	(6)	(8)
Error	(2)	18,022,930	(7)	
Total	(3)	(5)		

(一) 寫出 ANOVA 表中 (1) 至 (8) 的值。(8 分)

(二) 計算判定係數  $R^2$  及調整判定係數  $R_a^2$ ，並詳述兩者之意義與差異。(10 分)

(三) 下表為各解釋變數之變異膨脹因子 (variance inflation factor, VIF)：

	土地面積	人口數 總計	人口數 男	性別比例
VIF	1.178	2,876.474	2,870.672	1.341

詳述何謂 VIF 及其值的意義。(12 分)

解題關鍵

1. 《考題難易》：★

2. 《破題關鍵》：多元線性迴歸整體 ANOVA 表為基本內容。判定係數與調整後判定係數也是課內基本題，109 年地特有命題。變異數膨脹因子的計算在 101 年、103 年高考與 109 年地特有類似考題，屬課內基本內容，可參考迴歸分析課本 P.7-96 頁相同範例。

【擬答】

(一)

(1)  $5-1=4$

(2)  $22-5=17$

(3)  $22-1=21$

(4)  $97000915.78 - 18022930 = 78977985.78$

(5)  $SSTO = SS_y = 97000915.78$

(6)  $78977985.78 \div 5 = 15795597.16$

(7)  $18022930 \div 16 = 1126433.125$

(8)  $15795597.16 \div 1126433.125 = 14.023$

(二)  $R^2 = \frac{SSR}{SSTO} = \frac{78977985.78}{97000915.78} = 81.42\%$ ，代表以模型中的五個變項共同解釋人口密度有

81.42%解釋度。

$$R_a^2 = 1 - \frac{SSE}{SSTO} \frac{n-1}{n-p} = 1 - \frac{18022930}{97000915.78} \frac{21}{16} = 75.61\%$$

因模式引入一新的解釋變數時，只要此一解釋變數稍具解釋力，模式之判定係數必然提高。然而，解釋變數每增加一個，代表誤差自由度隨之減少一個，代表模式之解釋能力可能降低，判定係數未能顯示此情形，因此可計算調整判定係數  $R_a^2$  來評估多元迴歸模式的解

釋度，亦常作為模型選擇的準則。

(三) VIF 是多元迴歸模型用來檢查共線性的指標，透過 1 減掉預測變數  $X_i$  對迴歸模型中其他  $p - 2$  個預測變數進行迴歸後之複判定係數的倒數來衡量。即

$$VIF_{X_i} = \frac{1}{1 - R^2(X_i \text{ 對其他自變數作複迴歸})}$$

VIF 值大於 10，則此  $X_i$  可被其他自變數解釋或取代。

此例「人口數 總計」與「人口數 男」VIF 值大於 10，代表這兩個解釋變數之間存在共線性問題，因為當然人口數多，男性的人口自然多，所以解決的辦法是將這兩個變數其中之一自模型中移除。

四、若 SSR 表示迴歸平方和 (sum of squares for regression)

(一)詳述「額外的平方和 (Extra sum of squares)」 $SSR(X_1, X_4 | X_2, X_3)$  的意義。(5 分)

(二)詳細推導

$$SSR(X_1, X_2, X_3, X_4) = SSR(X_1) + SSR(X_2 | X_1) + SSR(X_3 | X_1, X_2) + SSR(X_4 | X_1, X_2, X_3)$$

(10 分)

解題關鍵

1. 《考題難易》：★

2. 《破題關鍵》：額外平方和為迴歸分析基本內容，不論解釋或推導皆可輕易得分，可參考王瑋 迴歸分析 P. 7-5 至 P.7-6 頁完整說明。

【擬答】

(一)額外平方和是指在原有的迴歸模型中，多加入一個或多個預測變數，造成誤差平方和 SSE 減少的量，也可視為加入一個或多個預測變數後，造成迴歸平方和 SSR 增加的量。在此

$$SSR(X_1, X_4 | X_2, X_3) = SSR(X_1, X_4, X_2, X_3) - SSR(X_2, X_3)$$

即代表模型中已有  $X_2, X_3$  變項，多加入  $X_1, X_4$  而造成 SSR 增加量。

(二)  $SSR(X_2 | X_1) = SSR(X_1, X_2) - SSR(X_1)$

$$SSR(X_3 | X_1, X_2) = SSR(X_1, X_2, X_3) - SSR(X_1, X_2)$$

$$SSR(X_4 | X_1, X_2, X_3) = SSR(X_1, X_2, X_3, X_4) - SSR(X_2, X_3, X_4)$$

所以  $SSR(X_1) + SSR(X_2 | X_1) + SSR(X_3 | X_1, X_2) + SSR(X_4 | X_1, X_2, X_3)$

$$= SSR(X_1) + SSR(X_1, X_2) - SSR(X_1) + SSR(X_1, X_2, X_3) - SSR(X_1, X_2)$$

$$+ SSR(X_1, X_2, X_3, X_4) - SSR(X_2, X_3, X_4)$$

$$= SSR(X_1, X_2, X_3, X_4)$$

五、若考慮一因子變異數分析有  $t$  個處理，每個處理有  $r$  個觀測值，其模型表示如下：

公職王歷屆試題 (110 地方特考)

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, t, \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

其中  $\mu$  為總平均數， $\tau_i$  為第  $i$  個處理效應， $\varepsilon_{ij}$  是隨機誤差項。

(一)若以線性迴歸模型

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

改寫上述一因子變異數分析模型，請定義  $Y$ ， $X$ ， $\beta$  及  $\varepsilon$ ，並詳述其維度。(10 分)

(二)為統計推論之目的，說明隨機誤差項所需的假設。(5 分)

(三)若欲檢定是否存在處理效應，請詳述此檢定之虛無假設、對立假設、檢定統計量及其拒絕域。(10 分)

解題關鍵

1. 《考題難易》：★★★★★

2. 《破題關鍵》：矩陣表達雖屬過去地方特考常考內容，但要將線性模型套入變異數分析，若沒有事前演練過，便不是輕易可以在考場當下可以寫出來。一般線性模型屬統計所碩士班以上的程度，考生面對此題可能也僅能從統計學實驗設計的章節來聯想矩陣的形式。矩陣的表達可以參考王瑋 迴歸分析第六章的相關內容。

【擬答】

(一)一因子變異數分析以線性模型表示如下：

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{1r} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{2r} \\ \vdots \\ Y_{t1} \\ \vdots \\ Y_{tr} \end{bmatrix}_{tr \times 1}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{tr \times (t+1)}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_t \end{bmatrix}_{(t+1) \times 1}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1r} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2r} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{tr} \end{bmatrix}_{tr \times 1}$$

$$\Rightarrow Y = \underset{(tr \times 1)}{X} \underset{tr \times (t+1)}{\beta} + \underset{(t+1) \times 1}{\varepsilon} \quad \underset{(tr \times 1)}{\varepsilon}$$

(二)隨機誤差項需服從常態分配，並且其變異數共變異數矩陣如下：

$$Cov(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

(三)可考慮採用廣義線性檢定

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t \quad H_1 : \tau_i \text{ 不全等}$$

$$\Rightarrow H_0 : \begin{bmatrix} \tau_1 - \tau_2 \\ \tau_1 - \tau_3 \\ \vdots \\ \tau_1 - \tau_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_0 : C\beta = 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : C\beta \neq 0$$

其中

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}_{(t-1) \times (t+1)}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_t \end{bmatrix}_{(t+1) \times 1}$$

(註：此處  $C\beta$  可以有不同的方式，設定上並不唯一)

檢定統計量為

$$F^* = \frac{(C\hat{\beta})^T (C(X^T X)^{-1} C^T)^{-1} (C\hat{\beta} - h) / t - 1}{SSE / (tr - t)} \sim F(t-1, tr-t)$$

其中  $SSE = Y^T (I - X(X^T X)^{-1} X^T) Y$

拒絕域為  $C : \{F^* > F_\alpha(t-1, tr-t)\}$



志光 × 保成 × 學儒

一次繳費輔導至考取

# 高普考取班 8 大保障

學費省很大	課程最完整	上榜賺獎金	學習最便利
全年課程不間斷，一次繳清學費輔導至考取。	完整課程循環，基礎班 → 正規班 → 專題課 → 總複習...等，全部擁有。	報名考取班第一年考取同職等考試，頒發高額獎學金。	輔導期間可依自己時間選擇面授或視訊學習，提高學習效率。
師資最多元	加選最超值	榜單最實在	公約有保障
重點科目安排多元師資，雙循環教學，可旁聽加強弱科，強化上榜實力。	輔導期間可加選其他科目增加考試機會，加選另享專案優惠。	年年榜單見證，錄取人數最多，錄取率最高，奪榜實力全國第一。	考取班簽訂公約，保障您的權利與義務至考取為止。

■ 完整課程資訊詳洽全國志光 · 保成 · 學儒門市 ■