

110 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：四等考試

類 科：測量製圖

科 目：測量平差法概要

賴明老師

一、測量資料中，可能含有偶然誤差、粗差（亦稱錯誤）或系統誤差，請各舉一例說明它們的特性及其處理方式。(25 分)

1. 《考題難易》★★★：普通

2. 《破題關鍵》：偶然誤差、粗差或系統誤差。重點提要：特性及處理方式。

【擬答】

(一)偶然誤差的特性及其處理方式

偶然誤差：由於自然環境之變化，儀器不夠精細，觀測者之習慣性偏向等因素所引起，其值常甚小，無法立即察覺。

1. 偶然誤差的特性

- (1) 出現誤差之情況有正有負，其正、負誤差出現之機會常相等。
- (2) 而較小之誤差出現機會比較大誤差出現之機會為多。
- (3) 出現大誤差的次數較少。
- (4) 具常態分佈曲線的特性。

2. 偶然誤差的處理方式

(1) 以直接觀測平差進行處理

例如：矩形的長度觀測值為 60.106、60.095、60.093、60.096

矩形的寬度觀測值為 20.094、20.106、20.096、20.098

經由直接觀測平差之分析

長度的最或是值及其中誤差 $60.0975 m \pm 0.0029 m$

寬度的最或是值及其中誤差 $b \pm \sigma_b = 20.0985 m \pm 0.0026 m$

(2) 以誤差傳播定律進行處理

由前例，面積 S 及其中誤差為

$$S = ab = 60.0975 \times 20.0985 = 1207.870 m^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}(ab) = b = \frac{S}{a}, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}(ab) = a = \frac{S}{b}, \quad \text{由誤差傳播定律}$$

$$\sigma_S = \pm S \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2} = \pm 1207.870 \times \sqrt{\left(\frac{0.0029}{60.0975}\right)^2 + \left(\frac{0.0026}{20.0985}\right)^2} = \pm 0.167 m^2$$

(二)粗差（亦稱錯誤）的特性及其處理方式

粗差（亦稱錯誤）：由於人為的疏忽、無經驗、不細心所引起。

1. 粗差的特性

- (1) 粗差的誤差常甚大。
- (2) 粗差很少出現，其出現的機率近似於零。

2. 粗差的處理方式：刪除出現粗差的觀測值

設： n 個觀測值 L_1, L_2, \dots, L_n ，其最或是值 $L = (L_1 + L_2 + \dots + L_n) / n$ ，誤差 $v_i = L_i - L$

誤差平方和= $[vv]$ ，觀測值中誤差 $m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$

如 $|v_i| > |2m|$ ，則第 i 個觀測值為粗差，應予刪除。

(三)系統誤差的特性及其處理方式

系統誤差：由於儀器本身或儀器改正不完善所引起之小誤差。此為常差，經多次觀測後，累積成大誤差。

1. 系統誤差的特性

- (1)發生誤差大小相同，具有同方向性。
- (2)會隨觀測次數累積而增大，故亦稱為累積誤差。

2. 系統誤差的處理方式

常以簡易平差的方式處理之。

例如：以捲尺觀測長度，得 20.140m、20.144m、20.146m、20.152m，捲尺名義長度 30 公尺，經實際檢定，長度為 29.97m，則尺長改正後的長度為
 $20.140 \times 29.97 / 30.00 = 20.120\text{m}$ 、 $20.144 \times 29.97 / 30.00 = 20.124\text{m}$ 、 $20.146 \times 29.97 / 30.00 = 20.126\text{m}$ 、 $20.152 \times 29.97 / 30.00 = 20.132\text{m}$

志光·保成·學儒 法緒·憲法·公民·行政法·行政學·政治學·財政學
地方自治·公共管理·會計(含中會)·經濟學

測驗易點通

全國首創

O!ops 你又踩雷了嗎? 埋頭苦練，不如讓老師點通你的學習之路

一點就通!

答題測驗就像玩踩地雷，總是在賭一把運氣？已經錯過的題目，總是一錯再錯？

常考題型	知識強化	易錯題型	觀念釐清
	同樣的出題範圍一考再考，卻還是選不出答案，測驗題不能硬背，唯有讓老師帶你一觀出題知識的原貌，弄清題目在考什麼，才是唯一正解。		彙整全國最大公職王線上網站測驗中，考生最高頻率答錯的試題，針對試題透徹分析出最易混淆的考點，加強授課、觀念釐清。

■完整課程資訊詳洽全國志光·保成·學儒門市■

二、以相同精度測量同一段邊長若干次，觀測值如下（單位均為公尺）：20.094、20.106、20.095、20.098、20.105、30.095、20.092、20.096、20.103 試求該段距離的最或是值及其標準差。(25 分)

1. 《考題難易》★★★：普通

2. 《破題關鍵》：直接觀測平差。重點提要：刪除粗差。

【擬答】

(一)以 9 個觀測值計算該段距離的最或是值 L 及其標準差

$$L = (20.094 + 20.106 + 20.095 + 20.098 + 20.105 + 30.095 + 20.092 + 20.096 + 20.103) / 9 = 21.2093 \text{m}$$

$$\text{誤差 } v_1 = L_1 - L = 20.094 - 21.2093 = -1.1153, \text{ 同理, } v_2 = -1.1033, v_3 = -1.1143, v_4 = -1.1113,$$

$$v_5 = -1.1043, v_6 = 8.8857, v_7 = -1.1173, v_8 = -1.1133, v_9 = -1.1063$$

$$[vv] = (-1.1153)^2 + (-1.1033)^2 + (-1.1143)^2 + (-1.1113)^2 + (-1.1043)^2 + 8.8857^2 + (-1.1173)^2 + (-1.1133)^2 + (-1.1063)^2 = 88.824656 \quad \therefore \therefore$$

$$\text{觀測值標準差 } m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{88.824656}{9-1}} = \pm 3.332, |2m| = 6.664$$

$$\therefore v_6 = 8.8857 > 6.664 = |2m| \quad \therefore L_6 = 30.095 \text{m 為粗差, 應予刪除}$$

(二)以 8 個觀測值計算該段距離的最或是值 L 及其標準差

$$L = (20.094 + 20.106 + 20.095 + 20.098 + 20.105 + 20.092 + 20.096 + 20.103) / 8 = 20.0986 \text{m 誤差 } v_1 = L_1 -$$

$$L = 20.094 - 20.0986 = -0.0046, \text{ 同理, } v_2 = 0.0074, v_3 = -0.0036, v_4 = -0.0006, v_5 = 0.0064, v_6 = -$$

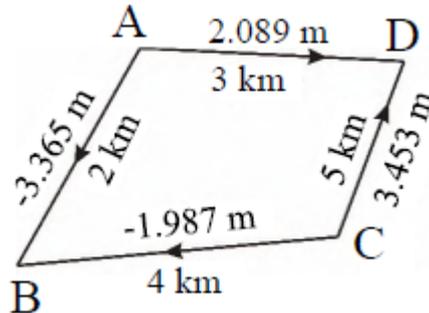
$$0.0066, v_7 = -0.0026, v_8 = 0.0044 [vv] = (-0.0046)^2 + 0.0074^2 + (-0.0036)^2 + (-0.0006)^2 + 0.0064^2 + (-$$

$$0.0066)^2 + (-0.0026)^2 + 0.0044^2 = 1.9988 \times 10^{-4}$$

$$\text{最或是值標準差 } \sigma_L = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n \cdot (n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{1.9988 \times 10^{-4}}{8 \times (8-1)}} = \pm 0.00189 \approx \pm 0.0019 \text{m}$$

$$\therefore \text{該段距離的最或是值及其標準差} = 20.0986 \text{m} \pm 0.0019 \text{m}$$

三、有一條水準環線如下圖所示，實施直接水準測量。圖上單位標示為公尺者，表示高程差觀測值；單位標示為公里者，表示各段的水準路線長。而箭頭方向為高程差觀測的方向。試問該次測量之環線高程差的閉合差為何（以多少 $\text{mm} \sqrt{K}$ 表示，其中 K 為公里數）？請說明該環線水準測量是否符合 $5\text{mm} \sqrt{K}$ 的閉合差限制值要求。又無論是否符合前述的閉合差限制值，均請以最小二乘法原理分配該閉合差於各段高程差觀測值上，使得最後的環線閉合差為零。(25 分)



1. 《考題難易》★★★★：困難
 2. 《破題關鍵》：閉合水準。重點提要：條件觀測平差。

【擬答】

已知：水準環線為閉合水準。環線上，兩點之間的高程差為：

$$\Delta h_{AB} = -3.365\text{m}, \Delta h_{BC} = -(-1.987) = 1.987\text{m}, \Delta h_{CD} = 3.453\text{m}, \Delta h_{DA} = -2.089\text{m}$$

(一) 計算環線高程差的閉合差 ω 。

$$\omega = \Delta h_{AB} + \Delta h_{BC} + \Delta h_{CD} + \Delta h_{DA} = (-3.365) + 1.987 + 3.453 - 2.089 = -0.014\text{m} = -14\text{mm}$$

$$\text{水準路線總長度 } K = 2 + 4 + 5 + 3 = 14\text{km}$$

$$\therefore \omega = C^{\text{mm}} \sqrt{K} \quad \therefore C = \frac{\omega}{\sqrt{K}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} = 3.74\text{mm}$$

(二) 該環線水準測量是否符合 $5\text{mm} \sqrt{K}$ 的閉合差限制值要求之分析

$$\therefore C = 3.74\text{mm} < 5\text{mm} \quad \therefore \text{符合 } 5\text{mm} \sqrt{K} \text{ 的閉合差限制值要求}$$

(三) 以最小二乘法原理分配該閉合差於各段高程差觀測值上

採用條件觀測平差法進行分析

1. 條件方程式 矩陣式

$$(\Delta h_{AB} + v_1) + (\Delta h_{BC} + v_2) + (\Delta h_{CD} + v_3) + (\Delta h_{DA} + v_4) = 0$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + (\Delta h_{AB} + \Delta h_{BC} + \Delta h_{CD} + \Delta h_{DA}) = 0$$

$$\Delta h_{AB} + \Delta h_{BC} + \Delta h_{CD} + \Delta h_{DA} = (-3.365) + 1.987 + 3.453 - 2.089 = -0.014\text{m} = -14\text{mm}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + (-14) = 0 \quad \text{以 mm 為單位。矩陣式 } BV + W = 0$$

$$B = [1 \ 1 \ 1 \ 1], \quad V = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T, \quad W = [-14]$$

2. 列法方程式： $M = BB^T$

$$M = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [4], \quad M^{-1} = \left[\frac{1}{4}\right]$$

3. 列關聯值向量 $K = -M^{-1}W$: $K = -\left[\frac{1}{4}\right] \times [-14] = \left[\frac{14}{4}\right] = [3.5]$

$$V = B^T K : \quad V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times [3.5] = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3.5 \\ 3.5 \\ 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

4. 計算改正數

5. 計算平差後，各段高程差的觀測值

$$\Delta \hat{h}_{AB} = -3.365 + 0.0035 = -3.3615m, \quad \Delta \hat{h}_{BC} = 1.987 + 0.0035 = 1.9905m$$

$$\Delta \hat{h}_{CD} = 3.453 + 0.0035 = 3.4565m, \quad \Delta \hat{h}_{DA} = -2.089 + 0.0035 = -2.0855m$$

查核： $\Delta \hat{h}_{AB} + \Delta \hat{h}_{BC} + \Delta \hat{h}_{CD} + \Delta \hat{h}_{DA} = -3.3615 + 1.9905 + 3.4565 - 2.0855 = 0$

志光 × 保成 × 學儒

財稅行政

商科人 入主公職首選

黃金投考組合 公職+證照 一次搞定

每年1月 初等-財稅	每年4月 關務-財稅	每年7月 高普考-財稅	每年8月 調查局-財經組	每年11月 記帳士證照	每年12月 地特-財稅
---------------	---------------	----------------	-----------------	----------------	----------------

雙料金榜 林○儒 109高普考財稅行政

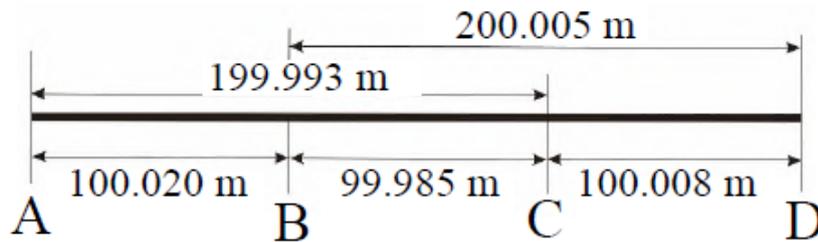
我是個喜歡問問題與老師對談的學生，上面授課讓我能夠跟老師們對談，只要不會的部份，老師都會很有耐心地重新講一遍，讓我可以理解那些專業觀念。老師總是告訴我們要多練習申論題，我謹記在心，都會按時給老師申論題批閱，這樣的練習幫助我拉高很多分數。

優異考取 戴○紘 109普考財稅行政

當初報名的是面授考取班，原因是若能一年考取當然最好，若無法的話也能在隔年繼續努力或者是讓自己休息一年後再繼續奮鬥。而上面授班除了能夠與老師互動外，也能有機會認識班上同學，大家彼此幫忙、彼此鼓勵，一起朝著目標前進是我認為非常重要的。

■ 完整課程訊息請洽志光 · 保成 · 學儒全國門市 ■

四、設 A、B、C、D 為同一直線上的四個點，已知 $\overline{AD} = 300.000$ 公尺，各觀測值如下圖所示。假設各觀測量獨立不相關，觀測量 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AC} 、 \overline{BD} 的權比例為 2 : 2 : 2 : 1 : 1，試以最小二乘法平差計算 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AC} 、 \overline{BD} 之最或是值。(25 分)



1. 《考題難易》★★★★：困難
2. 《破題關鍵》：間接觀測平差法。重點提要：未知量之設定。

【擬答】

已知： \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AC} 、 \overline{BD} 的權比例為 2 : 2 : 2 : 1 : 1。 $\overline{AD} = 300.000$ 公尺以間接觀測平差法進行分析

$$\overline{AB} = 100.020 + x_1, \overline{BC} = 99.985 + x_2$$

假設： $\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AB} - \overline{BC} = 300.000 - (100.020 + x_1) - (99.985 + x_2) = 99.995 - x_1 - x_2$

1. 觀測方程式

$$\begin{cases} 100.020 + v_1 = \overline{AB} = 100.020 + x_1 \\ 99.985 + v_2 = \overline{BC} = 99.985 + x_2 \\ 100.008 + v_3 = \overline{CD} = 99.995 - x_1 - x_2 \\ 199.993 + v_4 = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 100.020 + x_1 + 99.985 + x_2 \\ 200.002 + v_5 = \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 99.985 + x_2 + 99.995 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

2. 改正數方程式(以 mm 為單位)

$$\begin{cases} v_1 = x_1 \\ v_2 = x_2 \\ v_3 = -x_1 - x_2 - 13 \\ v_4 = x_1 + x_2 - (-12) \\ v_5 = -x_1 - 25 \end{cases}, \text{ 矩陣式 } V = AX - L, V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \\ -12 \\ 25 \end{bmatrix}, \text{ 權矩陣 } P = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

3. 列法方程式 $NX = U, N = A^T P A, U = A^T P L$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, N^{-1} = \frac{1}{21} \times \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \\ -12 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -63 \\ -38 \end{bmatrix}$$

4. 計算未知量向量 $X = N^{-1}U$

$$X = \frac{1}{21} \times \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -63 \\ -38 \end{bmatrix} = \frac{1}{21} \times \begin{bmatrix} -201 \\ -39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.57mm \\ -1.86mm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

5. 計算各觀測值改正數

$$v_1 = x_1 = -0.00957, v_2 = -0.00186, v_3 = -0.00157, v_4 = 0.00057, v_5 = -0.01543$$

6. 計算各觀測值之最或是值

$$\overline{AB} = 100.020 + v_1 = 100.01043 \approx 100.0104m$$

$$\overline{BC} = 99.985 + v_2 = 99.98314 \approx 99.9832m$$

$$\overline{CD} = 100.008 + v_3 = 100.00643 \approx 100.0064m$$

$$\overline{AC} = 199.993 + v_4 = 199.99357 \approx 199.9936m$$

$$\overline{BD} = 200.005 + v_5 = 199.98957 \approx 199.9896m$$