# 111 年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

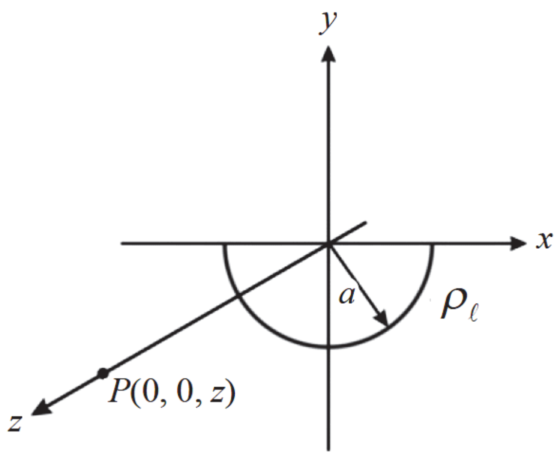
考試別：鐵路人員考試
等別：高員三級考試
類科組別：電子工程
科目：電磁學

陳銘老師

一、如圖所示，有一位於 x-y 平面之半圓線電荷分布，其線電荷密度為 $\rho_\ell$。試求在 $z$-軸上任意點（0, 0, z）之下列物理量。

㈠電位（V）。（8 分）

㈡電場強度（E）。（12 分）




| |
|---|
| 1.《考題難易》★★ |
| 2.《破題關鍵》：使用電壓與電場公式即可求出 |

【擬答】

㈠ $V(z)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\dfrac{\rho_l a d\phi'}{\left[a^2+z^2\right]^{1/2}}=\dfrac{\rho_l a}{4\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$

㈡在點 P 極小段產生之電場為 $d\vec{E}_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\dfrac{\rho_l\times(ad\phi)}{\left[a^2+z^2\right]^{3/2}}\times(\hat{z}\ z-a\hat{r})$

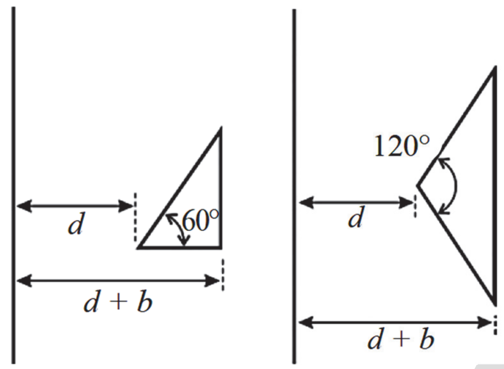
則電場為

$$\vec{E}_1=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{\rho_l\times a}{\left[a^2+z^2\right]^{3/2}}\times(\hat{z}\ z-a\hat{r})\,d\phi=\frac{\rho_l az}{4\varepsilon_0\left[a^2+z^2\right]^{3/2}}\hat{z}-\frac{\rho_l a^2}{4\varepsilon_0\left[a^2+z^2\right]^{3/2}}\hat{r}$$

二、試求出下列結構之互電感（mutual inductance）：

㈠空氣中一無限長直導線與其附近之一直角三角形導線，如圖(a)所示。（10 分）

㈡空氣中一無限長直導線與其附近之一等腰三角形導線，如圖(b)所示。（10 分）




(a) (b)

1.《考題難易》★★★

2.《破題關鍵》：使用安培環路定則後積分求磁通，則電感即可求出

【擬答】

㈠$\vec{B}_2=\hat{a}_\phi\dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$，$\Lambda=\phi=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$，where $d\vec{S}=\hat{a}_\phi\ zdr$

$z=\sqrt{3}\,(r-d)$

$\Lambda=\dfrac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}\displaystyle\int_d^{d+b}\dfrac{1}{r}\,(r-d)\,dr=\dfrac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}\left[b-d\ln\left(\dfrac{d+b}{d}\right)\right]$

$L=\dfrac{\Lambda}{I}=\dfrac{\sqrt{3}\mu_0}{2\pi}\left[b-d\ln\left(\dfrac{d+b}{d}\right)\right]$

㈡$\vec{B}=\hat{a}_\phi\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}=\hat{a}_\phi B_\phi$

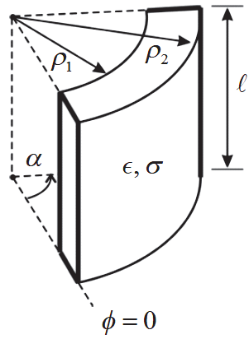
$\Lambda=\displaystyle\int_d^{d+b}B_\phi\cdot 2\sqrt{3}\,(r-d)\,dr=\dfrac{\sqrt{3}\mu_0 I}{\pi}\left[b-d\ln\left(\dfrac{d+b}{d}\right)\right]$

$L=\dfrac{\Lambda}{I}=\dfrac{\sqrt{3}\mu_0}{2\pi}\left[b-d\ln\left(\dfrac{d+b}{d}\right)\right]$

三、如圖所示，有一介電物質其形狀是由部分圓柱幾何曲線（粗線部分）所定義出的，其介電係數為 $\epsilon$。根據下列情況，試求其物理量：

㈠如果置於 $\phi=0$ 面及 $\phi=\alpha$ 面的導體，其電位分別維持在 $V=0$ 及 $V=V_0$，求該結構的電容值為何？（10 分）

㈡如果該介電物質改為一導電物質，其導電係數為 $\sigma$，其電位的邊界條件與㈠相同，求該結構的電阻值為何？（10 分）




純量函數 $f$ 之梯度運算（gradient）在圓柱座標的表示式為：

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

拉普拉斯方程式（Laplace’s equation）在圓柱座標的表示式為：

$$\nabla^2 V=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

1.《考題難易》★★★

2.《破題關鍵》：求出 R 或是 C 後，再利用 $RC=\frac{\varepsilon}{\sigma}$ 求出另一值

【擬答】

㈠$\because RC=\frac{\varepsilon}{\sigma}\Rightarrow C=\frac{1}{R}\frac{\varepsilon}{\sigma}=\frac{\frac{1}{\alpha}}{\sigma l\times\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}\frac{\varepsilon}{\sigma}=\frac{\sigma l\times\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}{\alpha}\frac{\varepsilon}{\sigma}=\frac{\varepsilon\times\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)l}{\alpha}$

㈡由 $\nabla^2 V=0\Rightarrow V=C_1\phi+C_2$，代入邊界條件，則

$V(\phi=0)=0\Rightarrow C_2=0$

$V(\phi=\alpha)=V_0\Rightarrow C_1=\frac{V_0}{\alpha}$

故

$V=\frac{V_0}{\alpha}\times\phi$

$\vec{E}=-a_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}=-a_\phi\frac{1}{r}\times\frac{V_0}{\alpha}$

$\vec{J}=\sigma\vec{E}=-a_\phi\frac{1}{r}\times\frac{\sigma V_0}{\alpha}$

$I=\int_s\vec{J}\cdot\vec{dS}=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{1}{r}\times\frac{\sigma V_0}{\alpha}\times l dr=\frac{\sigma V_0 l}{\alpha}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$

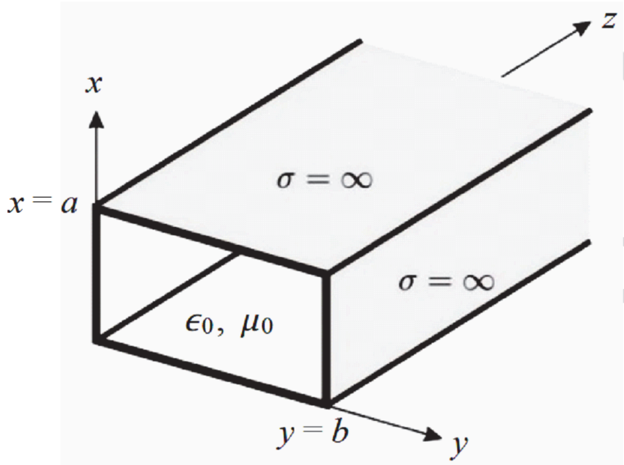
$\therefore R=\frac{V_0}{I}=\frac{\alpha}{\sigma l\times\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$

四、如圖所示之一矩形波導管，其內部之電磁場（電場 E 及磁場 H）如下列式子所給定：

$$E=-C\frac{\omega\mu_0 b}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\sin(\omega t-\beta z)\,\hat{x}$$

$$H=C\frac{\beta b}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\sin(\omega t-\beta z)\,\hat{y}+C\cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\cos(\omega t-\beta z)\,\hat{z}$$

其中 $C$ 為常數，$\beta$ 為相位常數，$\omega=2\pi f$ 且 $f$ 為激發頻率。假設波導管的四面金屬牆均為理想導體，試求出四面內牆上的面電荷密度（surface charge density）及面電流密度（surface current density）。（24 分）




| |
|---|
| 1.《考題難易》★★★ |
| 2.《破題關鍵》：此為 $TE_{02}$ 的矩形波導管傳播，因僅求面電荷密度與電流密度較為簡單 |

【擬答】

㈠四面內牆上面電流密度 $\vec{J}_s=\vec{a}_n\times\vec{H}$

1. $\vec{J}_s(x=0)=C\frac{\beta b}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\sin(\omega t-\beta z)\,\hat{z}-C\cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\cos(\omega t-\beta z)\,\hat{y}$

2. $\vec{J}_s(x=a)=-C\frac{\beta b}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\sin(\omega t-\beta z)\,\hat{z}+C\cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\cos(\omega t-\beta z)\,\hat{y}$

3. $\vec{J}_s(y=0)=C\cos(\omega t-\beta z)\,\hat{x}$

4. $\vec{J}_s(y=0)=-C\cos(\omega t-\beta z)\,\hat{x}$

㈡四面內牆上面電荷密度 $\rho_S=\varepsilon_0\,\vec{E}\cdot\vec{a}_n$

1. $\rho_S(x=0)=-C\frac{\omega\mu_0\varepsilon_0 b}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\sin(\omega t-\beta z)$

2. $\rho_S(x=a)=C\frac{\omega\mu_0\varepsilon_0 b}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\sin(\omega t-\beta z)$

3. $\rho_S(y=0)=0=\rho_S(y=b)$

五、一右手圓形極化平面波可用下列相量（phasor）來表示，

$$E(z)=E_0\left(\hat{x}-j\hat{y}\right)e^{-j\beta z}$$

其中 $\beta$ 為相位常數。若該平面波正向入射在位於 $z=0$ 的理想導體牆，試回答下列問題：

㈠決定其反射波的極化。（4 分）

㈡找出該理想導體牆上感應的電流。（6 分）

㈢寫出總電場以正弦參考時間（sine time reference）為基礎的瞬間表示式。（6 分）

| |
|---|
| 1.《考題難易》★★★ |
| 2.《破題關鍵》：使用邊界條件求出電場反射波後，再求出磁場強度 |

【擬答】

㈠ $\vec{E}_r(z)=(\hat{x}E_{rx}+\hat{y}E_{ry})e^{j\beta z},\ \vec{E}_i(0)+\vec{E}_r(0)=0\Rightarrow E_{rx}=-E_0,\ E_{ry}=jE_0,$

$\vec{E}_r(z)=(-\hat{x}E_0+\hat{y}\ jE_{ry})e^{j\beta z}$

反射波為左手圓極化波

㈡ $\vec{J}=\hat{a}_n\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\hat{a}_{ni}\times\vec{H}_1(\because\vec{H}_2=0),\hat{a}_{ni}=\hat{z}\ ,\hat{a}_{nr}=-\hat{z}$

$$\vec{H}_i(z)=\frac{1}{\eta_0}\hat{a}_{ni}\times\vec{E}_i=\frac{E_0}{\eta_0}(\hat{x}\ j+\hat{y})\ e^{-j\beta z},\ \vec{H}_r(z)=\frac{1}{\eta_0}\hat{a}_{nr}\times\vec{E}_r=\frac{E_0}{\eta_0}\ (\hat{x}\ j+\hat{y}\ )\ e^{j\beta z}$$

$$\Rightarrow\vec{H}_1(z)=\frac{E_0}{\eta_0}\ (\hat{x}\ j+\hat{y})(\ e^{-j\beta z}+e^{j\beta z})$$

$$\vec{J}(z)=\frac{E_0}{\eta_0}(-\hat{x}+\hat{y}\ j)\ (e^{-j\beta z}+e^{j\beta z})$$

㈢ $\vec{E}(z)=\vec{E}_i(z)+\vec{E}_r(z)=E_0(\vec{x}-j\vec{y})(e^{-j\beta z}-e^{j\beta z})=E_0(\vec{x}-j\vec{y}\ )(-j2)\sin\beta z$

時諧場為

$\vec{E}(z,t)=\vec{x}2\ E_0\sin\ \beta z\sin\omega t-\vec{y}2\ E_0\sin\beta z\cos\omega t$