

# 111年特種考試交通事業鐵路人員、國家安全局國家安全情報人員考試試題

考試別：鐵路人員考試、國家安全情報人員考試  
等 別：高員級考試高員三級考試、三等考試  
類科組：電力工程、電子工程、電子組（選試英文）  
科 目：工程數學

甲、申論題部：(50 分)

一、請利用拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 求解下列微分方程式，其中  $y'' = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$ 。  
 $y'' + y = \sin 2t$ ， $y(0) = 0$ ， $y'(0) = 1$ 。(15 分)

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：利用拉普拉斯轉換解微分方程式，基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P5-40~P5-44

【擬答】：

$$y'' + y = \sin 2t$$

$$\mathcal{L}\{y'' + y\} = \mathcal{L}\{\sin 2t\}$$

$$\Rightarrow S^2Y(S) - Sy(0) - y'(0) + Y(S) = \frac{2}{S^2 + 4}$$

$$\Rightarrow S^2Y(S) - 1 + Y(S) = \frac{2}{S^2 + 4}$$

$$\Rightarrow (S^2 + 1)Y(S) = \frac{S^2 + 6}{S^2 + 4}$$

$$\Rightarrow Y(S) = \frac{S^2 + 6}{(S^2 + 1)(S^2 + 4)} = \frac{\frac{5}{3}}{S^2 + 1} + \frac{-\frac{2}{3}}{S^2 + 4}$$

$$= \frac{5}{3} \times \frac{1}{S^2 + 1} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{S^2 + 4}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(S)\} = \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t$$

二、設  $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 。

(一)求  $A$  的所有特徵值 (eigenvalues) 與特徵向量 (eigenvectors)。(5 分)

(二)求  $A^5 - 2A^4 - A^3 + 2A^2 + 3A + 2I$ ，其中  $I$  是  $2 \times 2$  單位矩陣 (identity matrix)。(5 分)

(三)求  $A^n$ ，其中  $n$  是任意正整數。(5 分)

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：矩陣對角化及其運算，基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P8-50~P8-51

【擬答】：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\therefore \lambda = 1, 2$$

$$(1) \lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) & A^5 - 2A^4 - A^3 + 2A^2 + 3A + 2I \\ &= (A^2 - 3A + 2I)(A^3 + A^2) + 3A + 2I \\ &= 3 \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(\Rightarrow) \text{令 } P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^n &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 - 2^n & 2 - 2^{n+1} \\ -1 + 2^n & -1 + 2^{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

志光 · 學儒 · 保成 我全都要 公職工科  
國營工科

一次準備 多次考取機會



每年1月初等考

每年4月關務特考

每年6月鐵路特考

每年7月普考

每年7月高考

每年12月地方特考

不定期台電僱員

不定期國營事業

**張○維** 資訊管理系

110鐵路佐級電子工程 9個月考取

補習班老師會幫忙整理好重點與考題，並且由淺入深的教學，讓我一開始先建立基本觀念，之後遇到進階的考題可以更加得心應手。

**專業課程規劃**

年度班	扎實的課程安排，讓您火速擁有考試硬實力
兩年班	完整課程安排，穩固您的應考實力
考取班	一次繳費輔考至您考取(每年只要繳交換證教材費用)

工科新班開課 全面優惠中

三、請利用留數 (residue) 計算  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\sin\theta}$ 。(10 分)

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：留數定理的應用, 解三角積
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P10-79~P10-80

【擬答】：

$$\text{令 } z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta = izd\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2i}(ie^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\sin\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2z^2+5iz-2} dz$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z+2i)(2z+i)} dz$$

$$\Rightarrow z = -2i, -\frac{1}{2}i \text{ 為單極點, 且 } z = -\frac{1}{2}i \text{ 在 } |z|=1 \text{ 內}$$

$$\Rightarrow \text{Res}\{f(z)\} = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}i} (z + \frac{1}{2}i) \frac{1}{(z+2i)(2z+i)} = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}i} \frac{1}{2(z+2i)} = \frac{1}{3i}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\sin\theta} = 2\pi i \times (\frac{1}{3i}) = \frac{2\pi}{3}$$

四、設  $X$  是高斯隨機變數 (Gaussian random variable)，且期望值 (expected value)  $E(X)$  為 0，變異數 (variance)  $VAR(X)$  為 1，並具有下列機率密度函數 (probability density function)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, -\infty < x < \infty$$

(一) 設  $Y=3X+2$ 。求  $Y$  的期望值與機率密度函數。(5 分)

(二) 設  $Z=X^2$ 。求  $Z$  的期望值與機率密度函數。(5 分)

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：常態分配機率函數變數轉換
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P7-50~P78-51

【擬答】：

$$\text{(一)} (1) E(Y) = E(3X+2) = 3E(X)+2=2$$

$$(2) Y = 3X + 2 \Rightarrow X = \frac{1}{3}(y - 2) \Rightarrow J = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[\frac{1}{3}(y-2)]^2} \times |J| \\ &= \frac{1}{9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{18}(y-2)^2}, -\infty < y < \infty \end{aligned}$$

$$\text{(二)} (1) E(Z) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f(x) dx = 0$$

$$(2) \textcircled{1} X > 0 \Rightarrow Z = X^2 \Rightarrow X = Z^{\frac{1}{2}} \Rightarrow J = \frac{dX}{dZ} = \frac{1}{2\sqrt{Z}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(Z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z}{2}} \times \left| \frac{1}{2\sqrt{Z}} \right| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi Z}} e^{-\frac{Z}{2}}, Z > 0 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} X \leq 0 \Rightarrow Z = X^2 \Rightarrow X = -Z^{\frac{1}{2}} \Rightarrow J = \frac{dX}{dz} = -\frac{1}{2\sqrt{Z}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(Z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z}{2}} \times \left| -\frac{1}{2\sqrt{Z}} \right| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi Z}} e^{-\frac{Z}{2}}, Z > 0 \end{aligned}$$

由①、②得  $f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Z}} e^{-\frac{Z}{2}}, Z > 0$

志光·學儒·保成



# 輕鬆上榜 我做得到

## 鐵路特考 8 大學習資源 全面整合



- 基礎班
- 正規班
- 題庫班
- 總複習班
- 全國模擬考
- 考前關懷
- 申論指導
- 經驗傳承

善用補習班資源 幫助我上榜

寫申論題時,常常不知道如何下筆,交給老師批閱、提點後,便可朝著該方向練習,避免因為作答方向錯誤而浪費時間。



鐵路特考 員級 運輸營業 黃○禎

報名鐵路各類課程 享 專屬優惠價

乙、測驗題部分：(50分)

(D) 1.  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ , 其反矩陣(Inverse matrix)為  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , 下列何者正確?

- (A)  $a = -0.1$       (B)  $b = 0.1$       (C)  $c = 0.2$       (D)  $d = 0.3$

(A) 2. 矩陣  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 8 & -1 \end{bmatrix}$  而矩陣  $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ , 則此二矩陣的乘積  $AB$  之行列式值

(Determinant) 為何?

- (A)  $\det(AB)=24$       (B)  $\det(AB)=-24$       (C)  $\det(AB)=12$       (D)  $\det(AB)=-12$

(C) 3. 下列那一個矩陣具有反矩陣(Inverse matrix)?

(A)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(B) 4. 向量  $a=[1,2,3]$ ，向量  $b=[-4,-5,-6]$ ，設兩向量之夾角為  $\theta$ ，則  $\cos\theta=?$

(A)  $\frac{16\sqrt{22}}{77}$  (B)  $-\frac{16\sqrt{22}}{77}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) 5.  $T$  是  $R^2$  到  $R^2$  的線性轉換， $T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ， $T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ， $T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$  下列何者正確？

(A)  $a=5$  (B)  $b=4$  (C)  $c=3$  (D)  $d=2$

(D) 6. 矩陣  $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，則  $A^2$  的特徵值(eigenvalues)，不可能是下列哪一個？

(A) 9 (B) 1 (C) 16 (D) 4

(C) 7. 矩陣  $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  的 3 個特徵向量(eigenvectors)為  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  與  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，則下列敘述何者錯誤？

(A)  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  是  $A^3+6A^2$  的一個特徵向量 (B)  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  是  $A^5-3A^4+2A^2$  的一個特徵向量

(C)  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  是  $A^2-2A$  的一個特徵向量 (D)  $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  是  $A^5+4A^3-A$  的一個特徵向量

(B) 8. 下列何者不是「可對角化的(Diagonalizable)」矩陣？

(A)  $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

(C) 9. 給定  $Z=X+iY=(1-i)^{20}=re^{i\theta}$ ，則下列敘述何者錯誤？

(A)  $Z=-2^{10}$  (B)  $r=2^{10}$  (C)  $\theta=0$  (D)  $Y=0$

(D) 10. 下列的複數函數中，何者是解析函數(Analytic function)？

(A)  $f(x,y)=x^2-iy^2$  (B)  $f(x,y)=x-iy$   
(C)  $f(x,y)=x^2+y^2-2y+i(2xy-2x)$  (D)  $f(x,y)=x^2-y^2-2y+i(2xy-2x)$

(A) 11. 令  $C:|z|=3$  為以原點為圓心而半徑為 3 的圓周，則逆時鐘繞著  $C$  轉一圈所計算出來的複數積分  $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz$  之值為何？

(A)  $-\pi i$  (B)  $2\pi i$  (C)  $-2\pi i$  (D) 0

(A) 12. 複數無窮級數  $f(z) = \left( \dots + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} \right) + \left( 1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \frac{z^3}{27} + \frac{z^4}{81} \dots \right)$  的收斂區域 (Region of convergence) 為何？

(A)  $1 < |z| < 3$  (B)  $\frac{1}{3} < |z| < 1$  (C)  $|z| > 1$  或  $|z| < \frac{1}{3}$  (D)  $|z| > 3$  或  $|z| < 1$

(D) 13. 二階常微分方程式  $y'' + 4y' + 3y = 0$ ， $y(0) = 3$ ， $y'(0) = -5$  的解為何？



公職王歷屆試題 (111 鐵路特考、國家安全情報人員)

(A)  $y = 7e^x - 4e^{3x}$  (B)  $y = 2e^{-x} + 3e^{-3x}$  (C)  $y = 2e^x + 3e^{-3x}$  (D)  $y = 2e^{-x} + e^{-3x}$

(D) 14. 二階常微分方程式  $(x-2)^2 y'' - 5(x-2)y' + 8y = 0$  的解之型式為何？

(A)  $y = c_1(x-2)^3 + c_2(x-2)^5$  (B)  $y = c_1(x-2)^2 + c_2(x-2)^6$

(C)  $y = c_1(x-2)^3 + c_2(x-2)^4$  (D)  $y = c_1(x-2)^2 + c_2(x-2)^4$

(B) 15. 利用拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 解下列二階微分方程式  $y'' + 5y' + 6y = 2\delta(t-1)$ ， $y(0) = 0$ ， $y'(0) = 0$ ，其中  $\delta(t)$  為脈衝函數 (unit impulse)，對於  $t > 1$ ，下列何者正確？

(A)  $y = 2e^{-2(t-1)} + 2e^{-3(t-1)}$  (B)  $y = 2e^{-2(t-1)} - 2e^{-3(t-1)}$

(C)  $y = 2e^{2(t-1)} + 2e^{-3(t-1)}$  (D)  $y = 2e^{-2(t-1)} - 2e^{3(t-1)}$

(D) 16. 函數  $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$  且  $f(x+2\pi) = f(x)$ ，傅立葉級數 (Fourier series) 展開成

$\frac{4}{3\pi}(a \sin x + b \sinh 2x + c \sin 3x + d \sin 4x + \dots)$ ，則  $a + b + c + d = ?$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(D) 17. 已知函數  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$  的傅立葉轉換 (Fourier transform) 為  $F(\omega) = \frac{2 \sin(\omega)}{\omega}$ ，則函數

$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$  的傅立葉轉換  $G(\omega)$  應該為何者？

(A)  $G(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{2\omega}$  (B)  $G(\omega) = \frac{\sin(2\omega)}{2\omega}$  (C)  $G(\omega) = \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$  (D)  $G(\omega) = \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$

(A) 18. 某一種 Covid-19 的檢測方式，可將 90% 的 Covid-19 感染者判為陽性，但是會將 10% 的感染者誤判為陰性 (偽陰性, False negative)。而這種檢測方式又會將 95% 的 Covid-19 非感染者判為陰性，但有 5% 的非感染者則會被誤判為陽性 (偽陽性, False positive)。假設某地區實際上只有 10% 的 Covid-19 感染者，那麼隨機選擇該地區一個居民，以此種檢測方式做檢驗，結果此居民為陽性反應，請問這位居民真正感染 Covid-19 的機率是多少。

(A)  $\frac{2}{3}$  (B)  $\frac{7}{9}$  (C)  $\frac{5}{6}$  (D)  $\frac{5}{7}$

(B) 19. 機率質量函數  $P_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{4}, & x = 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，若 X 期望值為 a 和變異數為 b，則下列何者正確？

(A)  $a = 2$  (B)  $b = \frac{1}{2}$  (C)  $a = \frac{1}{2}$  (D)  $b = 1$

(D) 20. 已知 X 和 Y 聯合分佈機率密度函數 (Joint probability density function) 為  $f_{x,y}(x,y) =$

$\begin{cases} 2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，下列何者錯誤？

(A) 在  $0 \leq x \leq 1$ ， $f_x(x) = 2x$  (B) 在  $0 \leq y \leq 1$ ， $f_y(y) = 2(1-y)$

(C)條件機率密度函數 $f_{Y/X}(y|x) = \begin{cases} 1/x, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(D)條件機率密度函數 $f_{X/Y}(x|y) = \begin{cases} 1/y, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

志光·學儒·保成

# 掌握機會

你,也能快速就業

## 鐵路特考攻略班 公職、國營一次搞定

鐵路運輸攻略班	鐵路事務攻略班	鐵路工科攻略班	鐵路員級攻略班
鐵路佐級運輸營業 + 初等考交通行政 + 郵局內勤(專業職二)	鐵路佐級事務管理 + 初等考一般行政 + 台電僱員綜合行政	鐵路佐級工科 + 初等考電子 + 台電工科	鐵路員級運輸營業 + 國營職員企管組

**郭○伶** 鐵路特考佐級運輸營業·郵局專業職二櫃台業務  
不希望以後遇到中年失業,所以決定投入國考,由於郵局專業職二櫃台業務與鐵路佐級運輸營業有許多科目重疊,加上補習班相差的科目有優惠價,所以決定兩個考試一起準備。

**連過兩榜**

現在報名鐵路課程享超值優惠價

# 王