

# 111年公務人員普通考試試題

等別：四等考試

類科：土木工程、測量製圖

科目：測量學概要

賴明解題

一、一條水準線的逐差水準測量往測BM1到BM2的高程差觀測值為12.404公尺，水準線長為2.56公里；返測BM2到BM1的高程差觀測值為-12.382公尺，水準線長為2.60公里，試由這些數據計算往返測閉合差(往返測閉合差請以 $a \text{ mm}\sqrt{K}$ 表示， $K$ 係水準路線長，以公里計)，以及計算BM2到BM1高程差平均值。(高程差平均值計算到毫米，毫米以下四捨五入； $a$ 須計算至小數以下1位)(25分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：逐差水準往返觀測。重點提要：閉合差、權與路線長成反比。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材

作者：賴明

章節出處：第三章 水準測量 之 九、直接水準測量之誤差限制及平差計算

【擬答】：

已知：往測：高程差  $\Delta h_1 = 12.404 \text{ m}$ ，水準線長度  $L_1 = 2.56 \text{ km}$

返測：高程差  $\Delta h_2 = -12.382 \text{ m}$ ，水準線長度  $L_2 = 2.60 \text{ km}$

(一)閉合差  $\omega = \Delta h_1 + \Delta h_2 = 12.404 + (-12.382) = 0.022 \text{ m} = 22 \text{ mm}$

水準線總長度  $K = L_1 + L_2 = 2.56 + 2.60 = 5.16 \text{ km}$

$\therefore \omega = a^{\text{mm}}\sqrt{K}$ ， $a = \frac{\omega}{\sqrt{K}} = \frac{22}{\sqrt{5.16}} = 9.7$   $\therefore$ 往返測閉合差  $= 9.7^{\text{mm}}\sqrt{K}$

(二)計算 BM2 到 BM1 高程差平均值

高程差  $\Delta h_1$ 、 $\Delta h_2$  的絕對值為 12.404m、12.382m

權與水準線長度成反比， $P \propto \frac{1}{L}$ 。 $P_1 : P_2 = \frac{1}{L_1} : \frac{1}{L_2} = L_2 : L_1 = 2.60 : 2.56$

$[P] = P_1 + P_2 = 2.60 + 2.56 = 5.16$

$[P \cdot \Delta h] = 2.60 \times 12.404 + 2.56 \times 12.382 = 63.94832$

高程差平均值  $\Delta \bar{h} = \frac{[P \cdot \Delta h]}{[P]} = \frac{63.94832}{5.16} = 12.393 \text{ m}$

二、試寫出平面三參數正交轉換、四參數相似轉換，以及六參數仿射轉換的公式，並試各舉一例說明應用這些轉換的時機。(25分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：三、四、六參數坐標轉換。重點提要：公式、應用時機。

【命中特區】

書名：測量學 上課教材

作者：賴明

章節出處：第 6 節 平面坐標系之坐標轉換

【擬答】：

## (一)三參數正交轉換、四參數相似轉換，以及六參數仿射轉換的公式

## 1. 三參數正交轉換的公式

假設：平面坐標系 $(x_1, y_1)$ ，大地坐標系 $(x_2, y_2)$

旋轉 $\beta$ +平移 $(c, d)$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

## 2. 四參數相似轉換的公式

旋轉 $\beta$ +尺度改變 $s$ +平移 $(c, d)$  (四參數轉換 或 Helmert 轉換)

假設：平面坐標系 $(x_1, y_1)$ ，大地坐標系 $(x_2, y_2)$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_2 = ax_1 + by_1 + c \\ y_2 = -bx_1 + ay_1 + d \end{cases}$$

## 3. 六參數仿射轉換的公式

(1)說明： $\beta$ ：旋轉參數。 $c_1, c_2$ ：平移參數。

$\delta$ ： $x, y$ 並非正交（非直角座標系統）之夾角

$Sx$ ： $x_1$ 軸之尺度比參數。 $Sy$ ： $y_1$ 軸之尺度比參數

(2)考慮坐標軸非正交之效應（ $x'_1 - x_1$ ）

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \times \cos \delta \\ y'_1 = y_1 \times \sin \delta \end{cases} \quad \text{設 } \delta \text{ 很小} \quad \cos \delta \approx 1 \quad \sin \delta \approx \delta$$

$$\therefore \begin{cases} x'_1 = x_1 \\ y'_1 = y_1 + \delta \times x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = M_\delta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

(3)再考慮：平移（ $c_1, c_2$ ），旋轉（ $\beta$ ），尺度比（ $Sx$ 對 $x_1$ ， $Sy$ 對 $y_1$ ）效應

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Sx \times x_1 \\ Sy \times y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = M_\beta M_\delta \begin{bmatrix} Sx \times x_1 \\ Sy \times y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$M = M_\beta M_\delta = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta - \delta \times \sin \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta + \delta \times \cos \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} Sx \times x_1 \\ Sy \times y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = Sx(\cos \beta - \delta \times \sin \beta) \quad b_1 = -Sx \times \sin \beta$$

$$a_2 = Sy(\sin \beta + \delta \times \cos \beta) \quad b_2 = Sy \times \cos \beta$$

## (二)轉換時機

## 1. 三參數正交轉換的轉換時機

(1)二個坐標軸為正交。正交的坐標軸，轉換後仍維持正交。

(2)二個坐標軸的尺度比參數均相同

(3)有一個旋轉角度參數 $\theta$ ，以及一組平移坐標參數 $(c, d)$

## 2. 四參數相似轉換的轉換時機

(1)二個已知點的局部坐標與大地坐標均已知，欲計算待求點(已知局部坐標)之大地坐標時。

(2)轉換前後的形狀維持不變，即角度維持不變。

(3)正交的坐標軸，轉換後仍維持正交。

(4)有一個旋轉角度參數 $\theta$ ，以及一組平移坐標參數 $(c, d)$

(5)有一個比例參數 $S$ ，且雙軸的比例調整視為相同。

(6)為平面坐標轉換

## 3. 六參數仿射轉換的轉換時機

(1)二個坐標軸並非正交

(2)二個坐標軸的尺度比參數不一致

三、何謂雙距偏心測量?以此法求待定点坐标時,需要那些觀測量?並請說明應用此法如何計算待定点坐标?(25分)

## 【解題關鍵】

1.《考題難易》★★★

2.《破題關鍵》關鍵字：偏心測量，雙距偏心測量。重點提要：觀測量，坐标計算。

## 【命中特區】

書名：測量學 上課教材

作者：賴明

章節出處：第六章 控制測量 之 第2節 三角測量 之 五、偏心觀測及歸心計算

## 【擬答】：

## (一)雙距偏心測量

## 1.照準點偏心觀測

觀測水平角時，照準點(目標點、待定点)應與標石中心在同一垂直線上；但因三角點之規標日久之後，常會有偏離標石中心的情形發生；若在 B 觀測水平角時，C 點規標位置偏移至 D 點，結果測得之角度為  $\theta'$  而非  $\theta$ ，此時需量取偏心距  $e$  及角度  $\phi$ ，則因

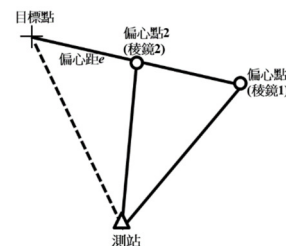
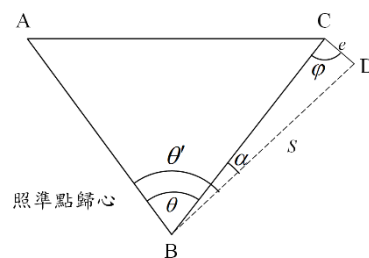
$$\frac{e}{\sin x} = \frac{s}{\sin \phi}, \text{ 因為 } x \text{ 極小, } \sin x = x = \frac{x''}{\rho''} \therefore x'' = \rho'' \times \frac{e}{s} \times \sin \phi, \\ \theta = \theta' - x$$

## 2.雙距偏心測量

雙距偏心測量需要選擇兩個偏心點，兩個偏心點必須與目標點(照準點)位於同一直線上，如圖所示。

觀測時，先觀測偏心點 1，再觀測偏心點 2，最後再觀測偏心距(偏心距為偏心點 2 至目標點的距離)。

根據偏心點 1 與偏心點 2 的觀測坐標，計算直線方位角，並由偏心距計算目標點的坐標。



雙距偏心測量示意圖

## (二)以此法求待定点坐标時,所需要的觀測量

整置全站儀於測站，後視另一個控制點以標定方位，再採用輻射法(光線法)測得偏心點 1 與偏心點 2 的坐標，再由偏心距計算目標點(待求點)的平面坐標。

所需要的觀測量如下：

- 1.觀測偏心點 1 之觀測量：測站到偏心點 1 之距離與方位角。
- 2.觀測偏心點 2 之觀測量：測站到偏心點 2 之距離與方位角。
- 3.偏心距  $e$ ：偏心點 2 至目標點(待求點)的距離。

## (三)計算待定点坐标的方法

1.假設：偏心點 1 與偏心點 2 的坐標，均由測站(已知點)採輻射法(光線法)計算而得，其坐標分別為：偏心點 1 ( $E_1, N_1$ )，偏心點 2 ( $E_2, N_2$ )。

2.由偏心點 1 與偏心點 2 的坐標，計算方位角  $\phi_{12}$

(1)計算坐標差： $\Delta E_{12} = E_2 - E_1$  和  $\Delta N_{12} = N_2 - N_1$ 。

(2)取坐標差的絕對值，計算初步的方位角  $\theta$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{|E_2 - E_1|}{|N_2 - N_1|} = \tan^{-1} \frac{|\Delta E_{12}|}{|\Delta N_{12}|}$$

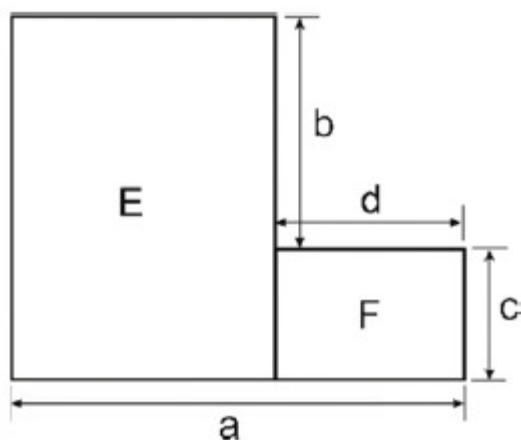
(3)依據所在的象限，由下表計算方位角 $\phi_{AB}$ 

| 象限  | $\Delta E$ | $\Delta N$ | 方位角 $\phi_{12}$                  |
|-----|------------|------------|----------------------------------|
| I   | +          | +          | $\phi_{12} = \theta$             |
| II  | +          | -          | $\phi_{12} = 180^\circ - \theta$ |
| III | -          | -          | $\phi_{12} = 180^\circ + \theta$ |
| IV  | -          | +          | $\phi_{12} = 360^\circ - \theta$ |

3. 偏心點 2 至目標點(待求點)的方位角 $=\phi_{12}$ 4. 由偏心點 2 的坐標( $E_2, N_2$ )，偏心距  $e$ ，計算目標點(待求點)的坐標( $E, N$ )

$$\begin{cases} E = E_2 + e \times \sin \phi_{12} \\ N = N_2 + e \times \cos \phi_{12} \end{cases}$$

四、如圖所示，量測兩個長方形E和F的四個邊長，長度分別為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 和 $d$ ，其量測標準差分別為 $3\sigma$ 、 $2\sigma$ 、 $\sigma$ 和 $\sigma$ 。假設所有觀測量均獨立不相關，試計算這兩個長方形E和F面積的標準差及其相關係數。(25分)



## 【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：多變量函數之誤差傳播定律，相關係數。

重點提要：先進行偏微分，再進行矩陣運算。矩陣為對稱矩陣。

## 【命中特區】

書名：測量學 補充講義

作者：賴明

章節出處：補充講義-測量平差法精要，第一章 多變量函數之誤差傳播。

## 【擬答】：

已知：標準差： $\sigma_a = \pm 3\sigma$ ， $\sigma_b = \pm 2\sigma$ ， $\sigma_c = \sigma_d = \pm \sigma$ ，變方： $\sigma_a^2 = 9\sigma^2$ ， $\sigma_b^2 = 4\sigma^2$ ， $\sigma_c^2 = \sigma_d^2 = \sigma^2$ 假設：長方形 E 之面積為  $X$ ，長方形 F 之面積為  $Y$ 

$$\begin{cases} X = (a-d) \cdot (b+c) \\ Y = c \cdot d \end{cases}, \quad \frac{\partial X}{\partial a} = b+c, \quad \frac{\partial X}{\partial b} = a-d, \quad \frac{\partial X}{\partial c} = a-d, \quad \frac{\partial X}{\partial d} = -(b+c)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial c} = d, \quad \frac{\partial Y}{\partial d} = c$$

由多變量函數之誤差傳播定律

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial a} & \frac{\partial X}{\partial b} & \frac{\partial X}{\partial c} & \frac{\partial X}{\partial d} \\ \frac{\partial Y}{\partial a} & \frac{\partial Y}{\partial b} & \frac{\partial Y}{\partial c} & \frac{\partial Y}{\partial d} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & & & \\ & \sigma_b^2 & & \\ & & \sigma_c^2 & \\ & & & \sigma_d^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial a} & \frac{\partial Y}{\partial a} \\ \frac{\partial X}{\partial b} & \frac{\partial Y}{\partial b} \\ \frac{\partial X}{\partial c} & \frac{\partial Y}{\partial c} \\ \frac{\partial X}{\partial d} & \frac{\partial Y}{\partial d} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b+c & a-d & a-d & -(b+c) \\ 0 & 0 & d & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9\sigma^2 & & & \\ & 4\sigma^2 & & \\ & & \sigma^2 & \\ & & & \sigma^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b+c & 0 \\ a-d & 0 \\ a-d & d \\ -(b+c) & c \end{bmatrix} \\
&= \sigma^2 \times \begin{bmatrix} 9(b+c) & 4(a-d) & a-d & -(b+c) \\ 0 & 0 & d & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b+c & 0 \\ a-d & 0 \\ a-d & d \\ -(b+c) & c \end{bmatrix} \\
&= \sigma^2 \begin{bmatrix} 9(b+c)^2 + 4(a-d)^2 + (a-d)^2 + (b+c)^2 & d \cdot (a-d) - c \cdot (b+c) \\ d \cdot (a-d) - c \cdot (b+c) & c^2 + d^2 \end{bmatrix} \\
\therefore \sigma_X^2 &= \sigma^2 \times [10 \cdot (b+c)^2 + 5(a-d)^2],
\end{aligned}$$

長方形 E 面積的標準差  $\sigma_X = \pm \sigma \cdot \sqrt{10(b+c)^2 + 5(a-d)^2}$

$\sigma_Y^2 = \sigma^2 \cdot (c^2 + d^2)$ ，長方形 F 面積的標準差  $\sigma_Y = \pm \sigma \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$ ，

$\sigma_{XY} = \pm \sigma \cdot [d(a-d) - c(b+c)]$

相關係數  $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{d(a-d) - c(b+c)}{\sqrt{10(b+c)^2 + 5(a-d)^2} \times \sqrt{c^2 + d^2}}$

志光 保成 學儒

112年 虛實整合

# 多元學習新型態

重聽OK 旁聽OK

突破傳統上課形式 **5大方式彈性又便利**

| 面授學習 | 直播學習 | 在家學習 | 視訊學習 | Wifi學習 |

◆學習◆  
零時差

同類科各班別  
皆可同步直播上課

◆服務◆  
零死角

服務緊貼需求  
隨時掌握學習狀況



線上  
課業諮詢



老師  
申論批閱



雙師資  
雙循環



多元  
補課方式



上榜生  
經驗親授



時事  
專題講座



歷屆試題  
練習



班導師  
制度

各班服務略有不同，詳情請洽全國志光、保成、學儒門市