

111 年公務人員高等考試三級考試試題

類科：經建行政、農業行政

科目：統計學

吳迪老師

參考值：

$$Z_{0.025}=1.96, Z_{0.05}=1.645, z_{0.1}=1.28, z_{0.2}=0.842, z_{0.3}=0.524, z_{0.4}=0.253$$

$$t_{0.025,9}=2.262, t_{0.025,10}=2.228, t_{0.025,11}=2.201, t_{0.025,12}=2.179, t_{0.05,8}=1.860, t_{0.05,9}=1.833, t_{0.05,10}=1.812$$

$$t_{0.05,11}=1.796, t_{0.05,12}=1.782$$

$$F_{0.025,1,3}=17.443, F_{0.025,3,3}=15.439, F_{0.025,3,4}=9.979, F_{0.025,3,5}=7.764, F_{0.05,1,3}=10.128,$$

$$F_{0.05,3,3}=9.277, F_{0.05,3,4}=6.591, F_{0.05,3,5}=5.409$$

一、假設隨機變數 X 的動差生成函數為 $M(t) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{8}e^{4t}$ 。令 X_1, X_2, \dots, X_{10} 為服從此機率分配之獨立樣本，而 \bar{X} 為其樣本平均。

(一) 試求 X 之機率分配。(5 分)

(二) 試估計 $P(\bar{X} \geq 2)$ 。(10 分)

1. 《考題難易》★★
2. 《破題關鍵》考動差母函數求機率分配及估計機率近似值
3. 《命中特區》吳迪著“統計學”P3-12~P3-13 及 P5-43~P5-48

【擬答】：

(一) X 的機率分配為

X	0	1	2	4
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$$(二) E(x) = \sum xf(x) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2} = \mu$$

$$E(x^2) = \sum x^2 f(x) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{7}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} = \sigma^2$$

$$\Rightarrow E(\sum_{i=1}^{10} X_i) = 15, \text{Var}(\sum_{i=1}^{10} X_i) = 12.5$$

利用常態分配估計其機率近似值，須做 Yates' 校正

$$P(\bar{X} \geq 2) = P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 20\right) = P\left(Z \geq \frac{(20 - 15) - \frac{1}{2}}{\sqrt{12.5}}\right) = P(Z \geq 1.28) = 0.1$$

二、假設父親與兒子的身高服從二元常態分配，其中父親的身高(公分)服從期望值為 170、標準差為 10 的常態分配，兒子的身高(公分)服從期望值為 170、變異數為 10 的常態分配，而二者之相關係數為 0.6。考慮父親身高為 175 公分的這群人，試問他兒子的平均身高為何？其中超過 175 公分之比例為何？(15 分)

1. 《考題難易》★★
2. 《破題關鍵》考二元常態分配的條件期望值及條件變異數
3. 《命中特區》吳迪著“統計學”P5-42 及 P5-51

【擬答】：

設 X 為父親的身高； Y 為兒子的身高

$$(一) E(Y|X = x) = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - \mu_X)$$

$$\Rightarrow E(Y|X = 175) = 170 + 0.6 \times \frac{\sqrt{10}}{10} (175 - 170) = 170.95(\text{cm})$$

$$(\text{二}) \text{Var}(Y|X = x) = \sigma_Y^2(1 - \rho^2)$$

$$\Rightarrow \text{Var}(Y|X = 175) = 10(1 - 0.6^2) = 6.4$$

$$\therefore P(Y > 175|X = 175) = P(Z > \frac{175 - 170.95}{\sqrt{6.4}})$$

$$= P(Z > 1.6) = 0.0548$$

註:題目只有附 $Z_{0.05} = 1.645$

三、假設 W 鎮每個月竊盜案件數是互相獨立的。令 μ 代表平均每個月的竊盜案件數、 \bar{X} 代表過去 36 個月的竊盜案件數的樣本平均。W 鎮警官打算以 $\{\bar{X} > 20.64\}$ 做為檢定

$H_0: \mu = 20$ vs. $H_1: \mu > 20$ 的拒絕域。假設這 36 個月的竊盜案件數之本平均數為 21、樣本標準差為 3。

(一) 試求該檢定之型一錯誤(Type I error probability) 為多少? (10 分)

(二) 試求在 $\mu = 21.28$ 時之型二錯誤(Type II error probability) 為多少? (10 分)

(三) 承子題(二)，若樣本數提高為 50，而拒絕域不變，試問型二錯誤增加或降低? (5 分)

1. 《考題難易》★
2. 《破題關鍵》考型一錯誤及型二錯誤的機率,基本題
3. 《命中特區》吳迪著"統計學" P8-3~P8-7

【擬答】：

$$(\text{一}) \begin{cases} H_0: \mu = 20 \\ H_1: \mu > 20 \end{cases}$$

$$C = \{\bar{X} | \bar{X} > 20.64\}$$

$n = 36 \geq 30$, 由 C, L, T, 利用 Z 檢定

$\alpha = P(\text{Re}H_0|H_0 \text{ 為真})$

$$= P(\bar{X} > 20.64 | \mu = 20) = P(Z > \frac{20.64 - 20}{\frac{3}{\sqrt{36}}})$$

$$= P(Z > 1.28) = 0.1$$

$$(\text{二}) \beta = P(\text{Ac}H_0|H_0 \text{ 為假}) = P(\bar{X} \leq 20.64 | \mu = 21.28)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{20.64 - 21.28}{\frac{3}{\sqrt{36}}}\right) = P(Z \leq -1.28) = 0.1$$

(三) 若提高樣本數，則會降低型 II 錯誤之機率

四、甲公司提出節能方案以減少其辦公大樓之冷氣耗電量，該節能方案實施一年後，記錄實施前後每月冷氣耗電量(1000 瓩)如下表：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
實施前	5.8	6.1	5.4	6.8	8.5	9.6	7.4	6.2	5.6	4.8	4.5	3.6
實施後	5.2	4.8	5.6	6.5	7.8	8.5	6.5	5.5	5.0	3.5	4.0	3.2

(一) 在 0.05 顯著水準下，試檢定該節能方案量是否減少冷氣耗電量。(10 分)

(二) 假設 1-3 月為春季、4-6 月為夏季、7-9 月為秋季、10-12 月為冬季，將資料依季節整理如下表。令顯著水準為 0.05，在考量實施前後可能有差異的情況下，試檢定春夏秋冬的冷氣耗電量是否相同。(15 分)

	春	夏	秋	冬
實施前	17.3	24.9	19.2	12.9
實施後	15.6	22.8	17.0	10.7

1. 《考題難易》★★
2. 《破題關鍵》考相依樣本 t 檢定及變異數分析中的 RBD, 為常見的考古題
3. 《命中特區》吳迪著”統計學”P8-25~P8-28 及 P9-33~P9-42

【擬答】：

(一)設母體為常態分配，利用相依樣本 t 檢定

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
前(X)	5.8	6.1	5.4	6.8	8.5	9.6	7.4	6.2	5.6	4.8	4.5	3.6
後(Y)	5.2	4.8	5.6	6.5	7.8	8.5	6.5	5.5	5.0	3.5	4.0	3.2
D=X-Y	0.6	1.3	-0.2	0.3	0.7	1.1	0.9	0.7	0.6	1.3	0.5	0.4

$$\Sigma D = 8.2, \Sigma D^2 = 7.64$$

$$\bar{D} = \frac{8.2}{12} = 0.68, S_D = \sqrt{\frac{1}{11} \left[7.64 - \frac{0.68^2}{12} \right]} = 0.83$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_X \leq \mu_Y \\ H_1 : \mu_X > \mu_Y \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\text{拒絕域 } C = \{t | t > t_{0.05}(11) = 1.796\}$$

檢定統計量

$$t = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} = \frac{0.68 - 0}{\frac{0.83}{12}} = 2.838 \in C \Rightarrow \text{ReHo}$$

結論：有證據顯示該節能方案可減少冷氣耗電量

(二)利 RBD

	春	夏	秋	冬	和	
前	17.3	24.9	19.2	12.9	74.3	T1.
後	15.6	22.8	17.0	10.7	66.1	T2.
和	32.9	47.7	36.2	23.6	140.4	T..

T.1

T.2

T.3

T.4

$$\Sigma \Sigma X_{ij}^2 = 17.3^2 + \dots + 10.7^2 = 2621.04$$

$$r=2, C=4, N=8$$

$$SST = SSB + SSTR + SSE$$

$$1. SST = \Sigma \Sigma X_{ij}^2 - \frac{T..^2}{N} = 2621.04 - \frac{140.4^2}{8} = 157.02$$

公職王歷屆試題 (111 高考三級)

$$2. SSB = \frac{1}{c} \sum T_i^2 - \frac{T^2}{N} = \frac{1}{4} [74.3^2 + 66.1^2] - \frac{140.4^2}{8} = 8.405$$

$$3. SSTR = \frac{1}{r} \sum T_j^2 - \frac{T^2}{N} = \frac{1}{2} [32.9^2 + 47.7^2 + 36.2^2 + 23.6^2] - \frac{140.4^2}{8} = 148.53$$

$$4. SSE = SST - SSB - SSTR - SSE = 0.085$$

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \\ H_1: \mu_i \text{ 不全相同, } i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\text{拒絕域 } C = \{F | F > F_{0.05}(3, 3) = 9.277\}$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{\frac{148.53}{3}}{\frac{0.085}{3}} = 1747.41 \in C \Rightarrow \text{ReHo}$$

結論：有證據顯示春夏秋冬的冷氣耗電量不全相同

112年 虛實整合

多元學習新型態

突破傳統上課形式 **5大方式** 彈性又便利

| 面授學習 | 直播學習 | 在家學習 | 視訊學習 | Wifi學習 |

◆學習◆
零時差

同類科各班別
皆可同步直播上課

◆服務◆
零死角

服務緊貼需求
隨時掌握學習狀況

線上
課業諮詢



老師
申論批閱



雙師資
雙循環



多元
補課方式



上榜生
經驗親授



時事
專題講座



歷屆試題
練習



班導師
制度



各班服務略有不同，詳情請洽全國志光、保成、學儒門市

五、甲市鎮過去 6 年之人口數(千人)如下：(每小題 10 分，共 20 分)

2016	2017	2018	2019	2020	2021
520	580	560	650	780	800

(一)試用三期移動平均法預測 2019 至 2022 年人口數，並計算平均絕對誤差(Mean Absolute Deviation)。

(二)試以平滑係數為 0.8 之簡單指數平滑法，預測 2017 至 2022 年之人口數，並計算平均絕對誤差。

1. 《考題難易》★★
2. 《破題關鍵》考時間序列的移動平均法及指數平滑法，為往年較少出現的考題
3. 《命中特區》吳迪著”統計學”P13-4~P13-10

【擬答】：

(一)

年度	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Y_i	520	580	560	650	780	800	
\hat{Y}_i 預測值				553.33	596.67	663.33	743.33

其中 \hat{Y}_i 預測值為前三期的平均值

平均絕對誤差

$$\begin{aligned} \text{MAE} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i - \hat{Y}_i| \\ &= \frac{|650 - 553.33| + |780 - 596.67| + |800 - 663.33|}{3} \\ &= 138.89 \end{aligned}$$

(二)

年度	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
X_t	520	580	560	650	780	800	
Y_t 預測值		520	568	561.6	632.32	750.464	790.0928

其中 $Y_t = 0.8X_{t-1} + 0.2Y_{t-1}$

平均絕對誤差

$$\begin{aligned} \text{MAE} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_t - Y_t| \\ &= \frac{|580 - 520| + \dots + |800 - 750.464|}{5} \\ &= 70.7232 \end{aligned}$$

志光 × 保成 × 學儒

跟著學長姐 你也可以高分上榜

普考狀元 高考榜眼 黃○慧 110高普考·經建行政

老師的許多重要考點以及解題架構都講解十分清楚，如果沒有法律基礎，只要跟著老師的步調，也能拿到平均分數。成功從來都沒有捷徑，想要怎樣的人生就得自己爭取，只要堅持到最後一刻，相信榜單上一定有你。

雙料金榜 應屆考取 傅○ 110高普考·財稅行政

這裡的師資很齊全，後備的服務資源也很完善。我是在校期間報名校園專案課程，這個課程有多元的上課方式，讓我可以一邊完成學校的課業，也不會落下補習班的進度，也因此我才能在畢業就考取公職。

雙料金榜 莊○家 110高普考·統計

考試與學習是長期的，不應該是考試前要熬夜苦讀，考完試就可以不用繼續念書，應該視準備考試為生活的一部分，想放鬆就放鬆，但還是要持續的念，數學是累積學習的科目，慢慢理解每一個細節，就有機會上榜。

一年考取 陳○宇 110高普考·財稅行政

正規班幾乎整天都會上課，在當天課程結束後，我至少會花兩個小時以上的時間將當日的課程做複習，加深自己的印象。除了補習班提供的教材資源外，並沒有額外購買其他參考書。補習班提供課本內容非常詳盡，準備國考綽綽有餘。