111 年公務人員普通考試試題

類　科：測量製圖
科　目：測量平差法概要

賴明老師

甲、申論題部分：

一、測量儀器觀測所得之資料，可能含有幾類誤差，其特性為何？今以全測站儀測量某一方向的讀數分別為 359°59′58″、350°59′59″、359°59′59″、0°0′0″、359°59′58″、359°59′59″，此組資料中位數、最或是值、觀測精度以及最或是值中誤差各是多少？並說明此組資料包含那幾類誤差。（計算結果四捨五入至整數秒小數點下一位）（25 分）

1.《考題難易》★★
2.《破題關鍵》關鍵字：最或是值，算術平均，誤差種類及特性。
　　　　　　重點提要：粗差刪除，0°0′0″=360°0′0″=359°59′60″。
3.【命中特區】
書名：測量平差法 上課教材
作者：賴明
章節出處：第三章 直接觀測平差之一、等精度（等權）直接觀測平差

【擬答】

㈠誤差種類及特性

測量儀器觀測所得之資料，可能含有三類誤差，包含：粗差、系統誤差、偶然誤差(隨機誤差)，其特性為：

1.粗差

由於人為的疏忽、無經驗、不細心所引起的大誤差。通常是指在正常觀測條件下，可能出現比最大誤差還要大的誤差。粗差應可以且必須避免，其性質與誤差不同，因而不能視為誤差。含有粗差的觀測值，都應予以找出，並捨棄不用。

2.系統誤差

⑴誤差大小相同，具有同方向性、系統性，或在觀測過程中依一定的規律變化，或者為一常數。

⑵誤差符號相同，誤差隨觀測次數累積而增大，故稱為累積差。對於測量成果的影響，特別顯著。

3.偶然誤差(隨機誤差)

⑴誤差有正有負。相同大小的正、負誤差，出現之機率相等。

⑵較小之誤差出現機率，較大誤差出現之機率為高。

⑶甚大誤差不易出現。

⑷具常態分布曲線的特性。

㈡方向讀數之分析

0°0′0″=360°0′0″=359°59′60″

1.粗差刪除

∵ 350°59′59″與其他 5 個方向讀數差異過大，相差近 9°，本質為粗差，應予刪除。

2.中位數

5 個方向讀數由大到小排列：359°59′60″，359°59′59″，359°59′59″，359°59′58″，359°59′58″

中位數=359°59′59″

3. 最或是值=359°59′00″+(60″+59″+59″+58″+58″)/5=359°59′58.8″

4. 觀測精度

誤差=方向讀數−最或是值，v_1=359°59′58″−359°59′58.8″=−0.8″

同理；v_2=0.2″，v_3=1.2″，v_4=−0.8″，v_5=0.2″。$[vv]=(-0.8)^2*2+0.2^2*2+1.2^2=2.8$

觀測精度=觀測值中誤差　$m=\pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{n-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{2.8}{5-1}}=\pm 0.8''$

5. 最或是值中誤差 σ

$$\sigma=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}=\pm\sqrt{\frac{2.8}{5*(5-1)}}=\pm 0.4''$$

㈢此組資料包含的誤差

粗差、偶然誤差(隨機誤差)

二、兩已知點 A、B 平面坐標分別為（ 900.000 m, 1250.000 m） 與（1000.000 m, 1000.000 m），且已知 AB 方位角之中誤差為 ± 3.0″；今以全站儀架站順時鐘方向觀測得∠ABC 與∠BCD 之角度，分別為 197°59′59″ ± 3.0″與 193°29′59″ ± 3.0″，試繪出相關點位略圖，並求 AB、BC、CD 方位角，以及 BC、CD 方位角之中誤差。（25 分）

1.《考題難易》★★★ 2.《破題關鍵》關鍵字：坐標反算，方位角推估。重點提要：誤差傳播定律。 3.【命中特區】 書名：測量平差法 上課教材 作者：賴明 章節出處：第二章 誤差傳播定律及其應用

【擬答】

已知：A(X_A,Y_A)=(900.000 m, 1250.000 m)，B(X_B,Y_B)=(1000.000 m, 1000.000 m)

$\sigma_{\phi_{AB}}=\pm 3.0''$，$\angle ABC\pm\sigma_{\angle ABC}=197°59'59''\pm 3.0''$

$\angle BCD\pm\sigma_{\angle BCD}=193°29'59''\pm 3.0''$，$\sigma_{\phi_{AB}}=\pm 3.0''=\sigma_{\angle ABC}=\sigma_{\angle BCD}=\sigma_o$

㈠由 A,B 二點坐標，得方位角 ϕ_{AB}

$\Delta X_{AB}=X_B-X_A=1000-900=100m>0$

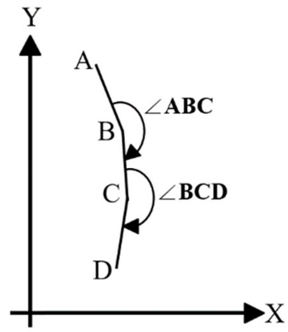
$\Delta Y_{AB}=Y_B-YA=1000-1250=-250m<0$

$$\theta=\tan^{-1}\left|\frac{\Delta X_{AB}}{\Delta Y_{AB}}\right|=\tan^{-1}\left|\frac{100}{-250}\right|=21°48'05''$$

$\phi_{AB}=180°-\theta=180°-21°48'05''=158°11'55''$

㈡計算 BC 邊方位角 ϕ_{BC} 及其中誤差：如圖

$\phi_{BC}=\phi_{AB}+180°+\angle ABC-360°=158°11'55''+180°+197°59'59''-360°=176°11'54''$



$$\frac{\partial\phi_{BC}}{\partial\phi_{AB}}=\frac{\partial}{\partial\phi_{AB}}(\phi_{AB}+\angle ABC-180^\circ)=1\text{，}$$

$$\frac{\partial\phi_{BC}}{\partial\angle ABC}=\frac{\partial}{\partial\angle ABC}(\phi_{AB}+\angle ABC-180^\circ)=1$$

$$\frac{\sigma_{\phi_{BC}}''}{\rho''}=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\phi_{BC}}{\partial\phi_{AB}}\right)^2\times\left(\frac{\sigma_{\phi_{AB}}''}{\rho''}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi_{BC}}{\partial\angle ABC}\right)^2\times\left(\frac{\sigma_{\angle ABC}''}{\rho''}\right)^2}$$

偏微分之值代入，得

$$\frac{\sigma_{\phi_{BC}}''}{\rho''}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\phi_{AB}}''}{\rho''}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\angle ABC}''}{\rho''}\right)^2}$$ ，等式左右同乘 ρ''，得

$$\sigma_{\phi_{BC}}''=\pm\sqrt{(\sigma_{\phi_{AB}})^2+(\sigma_{\angle ABC})^2}=\pm\sqrt{(3'')^2+(3'')^2}=\pm3\sqrt{2}''=\pm4.2''$$

(三)計算 CD 邊方位角 ϕ_{CD} 及其中誤差

$$\phi_{CD}=\phi_{BC}+180^\circ+\angle BCD-360^\circ=176^\circ11'54''+180^\circ+193^\circ29'59''-360^\circ=189^\circ41'53''$$

$$\frac{\partial\phi_{CD}}{\partial\phi_{BC}}=\frac{\partial}{\partial\phi_{BC}}(\phi_{BC}+\angle BCD-180^\circ)=1\text{，}\quad\frac{\partial\phi_{CD}}{\partial\angle BCD}=\frac{\partial}{\partial\angle BCD}(\phi_{BC}+\angle BCD-180^\circ)=1$$

$$\frac{\sigma_{\phi_{CD}}''}{\rho''}=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\phi_{CD}}{\partial\phi_{BC}}\right)^2\times\left(\frac{\sigma_{\phi_{BC}}''}{\rho''}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi_{CD}}{\partial\angle BCD}\right)^2\times\left(\frac{\sigma_{\angle BCD}''}{\rho''}\right)^2}$$ ，偏微分之值代入，得

$$\frac{\sigma_{\phi_{CD}}''}{\rho''}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\phi_{BC}}''}{\rho''}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\angle BCD}''}{\rho''}\right)^2}$$ ，等式左右同乘 ρ''，得

$$\sigma_{\phi_{CD}}''=\pm\sqrt{(\sigma_{\phi_{BC}})^2+(\sigma_{\angle BCD})^2}=\pm\sqrt{(3\sqrt{2}'')^2+(3'')^2}=\pm3\sqrt{3}''=\pm5.2''$$

三、試說明直接觀測平差與間接觀測平差之異同；今以水準測量行經不同路徑，觀測兩點之高差分別為－1.253 m、－1.250 m、－1.247 m、－1.251 m，假設兩點之高差為 xm，以直接觀測平差求解 x 時，四段高差對應之改正數分別以 vi（i＝1～4）表示，試列出觀測方程式；若四段高差之權分別為 3、1、2、4，試計算 x 值及其中誤差。（25 分）

1.《考題難易》★★★★
2.《破題關鍵》關鍵字：直接觀測平差法，直接觀測平差與間接觀測平差之異同點。
重點提要：不等精度（加權）、高斯最小二乘法。
3.【命中特區】
書名：測量平差法 上課教材
作者：賴明
章節出處：第三章 直接觀測平差之二、不等精度（加權）直接觀測平差

【擬答】

㈠直接觀測平差與間接觀測平差之異同

1.相同點

⑴均依最小二乘法原理進行平差計算

⑵均可求得觀測量的最佳估值(最或是值)及其精度(中誤差)

2.不同點

⑴直接觀測平差是直接對未知量進行多餘觀測，間接觀測平差的觀測量是一組獨立未知量的函數

⑵間接觀測平差可求得未知量的最佳估值及其精度。

⑶間接觀測平差需要利用矩陣進行運算，直接觀測平差則不需要。

㈡以直接觀測平差求解 x 值及其中誤差

4 個高差觀測值：$x_1=-1.253m, x_2=-1.250m, x_3=-1.247m, x_4=-1.251m$

權：$P_1=3, P_2=1, P_3=2, P_4=4$

假設：x 為最或是值，改正數 $v_1=x_1-x, v_2=x_2-x, v_3=x_3-x, v_4=x_4-x$

1.觀測方程式

由高斯最小二乘法，$\Phi=[Pvv]=\min$，$\Phi=P_1v_1^2+P_2v_2^2+P_3v_3^2+P_4v_4^2$

$$\Phi=P_1\cdot(x_1-x)^2+P_2\cdot(x_2-x)^2+P_3\cdot(x_3-x)^2+P_4\cdot(x_4-x)^2$$

欲得 $\Phi=[Pvv]=\min$，必須 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=0$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[P_1\cdot(x_1-x)^2+P_2\cdot(x_2-x)^2+P_3\cdot(x_3-x)^2+P_4\cdot(x_4-x)^2\right]$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-2P_1\cdot(x_1-x)-2P_2\cdot(x_2-x)-2P_3\cdot(x_3-x)-2P_4\cdot(x_4-x)$$

$$\because\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}=0\qquad\therefore\ -2P_1\cdot(x_1-x)-2P_2\cdot(x_2-x)-2P_3\cdot(x_3-x)-2P_4\cdot(x_4-x)=0$$

$$P_1\cdot(x_1-x)+P_2\cdot(x_2-x)+P_3\cdot(x_3-x)+P_4\cdot(x_4-x)=0$$

$$P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+P_4x_4-x\cdot(P_1+P_2+P_3+P_4)=0$$

$$x=\frac{P_1\cdot x_1+P_2\cdot x_2+P_3\cdot x_3+P_4\cdot x_4}{P_1+P_2+P_3+P_4}=\frac{[P\cdot x]}{[P]}$$

2.計算 x 值及其中誤差

權之和 $[P]=3+1+2+4=10$，

$$[P\cdot x]=3\times(-1.253)+1\times(-1.250)+2\times(-1.247)+4\times(-1.251)=-12.507$$

$$x=\frac{[P\cdot x]}{[P]}=\frac{-12.507}{10}=-1.2507$$

誤差 $v_1=x_1-x=-1.253-(-1.2507)=-0.0023$，同理 $v_2=-1.250-(-1.2507)=0.0007$

$v_3=-1.247-(-1.2507)=0.0037$，$v_4=-1.251-(-1.2507)=-0.0003$

$$[Pvv]=3\times(-0.0023)^2+0.0007^2+2\times0.0037^2+4\times(-0.0003)^2=4.41\times10^{-5}$$

中誤差 $\sigma_x=\pm\sqrt{\dfrac{[Pvv]}{[P]\times(n-1)}}=\pm\sqrt{\dfrac{4.41\times10^{-5}}{10\times(4-1)}}=\pm0.0012m$

$\therefore$ x 值及其中誤差 $x\pm\sigma_x=-1.2507m\pm0.0012m$

四、已知 A、D 之平面坐標如下表一所列，以衛星定位靜態觀測方式得到 AB、BD 之基線分量如下表二所列。假設 B 點坐標為（*x, y*），並將觀測值視為等權，且基線各分量獨立不相關，令 AB、BD 之基線分量改正數分別是 *v1*～*v4*，試列出觀測方程式，並求出 B 點坐標及其中誤差。（25 分）

表一

坐標	X 方向(m)	Y 方向(m)
A	65777.218	-7798.316
D	59490.412	-4911.507

表二

基線	X 方向分量(m)	Y 方向分量(m)
AB	-7720.703	-1024.518
BD	1433.905	3911.321

1.《考題難易》★★★★
2.《破題關鍵》關鍵字：間接觀測平差法。重點提要：等權，基線，坐標及其中誤差。
3.【命中特區】
書名：測量平差法 上課教材
作者：賴明
章節出處：第五章 間接觀測平差　之　二、等權間接觀測平差

【擬答】

已知：$A(X_A,Y_A)=(65777.218m,-7798.316m)$

$D(X_D,Y_D)=(59490.412m,-4911.507m)$

㈠計算 B 點坐標之初值 $B(X_B,Y_B)$

∵基線 AB 之 X 方向分量=－7720.703 m，Y 方向分量=－1024.518 m

$$\therefore\ X_{B_o}=X_A+(-7720.703)=65777.218+(-7720.703)=58056.515m$$

$$Y_{B_o}=Y_B+(-1024.518)=-7798.316-1024.518=-8822.834m$$

設：$X_B=X_{B_o}+x=58056.515+x$，$Y_B=Y_{B_o}+y=-8822.834+y$

㈡使用間接觀測平差法

觀測方程式：

$$\begin{cases}\Delta X_{AB}+v_1=X_B-X_A\\ \Delta Y_{AB}+v_2=Y_B-Y_A\\ \Delta X_{BD}+v_3=X_D-X_B\\ \Delta Y_{BD}+v_4=Y_D-Y_B\end{cases},\quad \begin{cases}-7720.703+v_1=X_B-X_A\\ -1024.518+v_2=Y_B-Y_A\\ 1433.905+v_3=X_D-X_B\\ 3911.321+v_4=Y_D-Y_B\end{cases}$$

，A,B,D 三點坐標代入

$$\begin{cases}-7720.703+v_1=-7720.703+x\\ -1024.518+v_2=-1024.518+y\\ 1433.905+v_3=1433.897-x\\ 3911.321+v_4=3911.327-y\end{cases},\quad \begin{cases}v_1=x\\ v_2=y\\ v_3=-x-0.008\\ v_4=-y+0.006\end{cases}\text{以 mm 表示}\begin{cases}v_1=x\\ v_2=y\\ v_3=-x-8\\ v_4=-y+6\end{cases},\ V=AX-L$$

$$V=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}，A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}，X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}，L=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}$$

組法方程式 $NX=U$，$N=A^TA$，$U=A^TL$，$X=N^{-1}U$

$$N=A^TA=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}，N^{-1}=\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$U=A^TL=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$X=N^{-1}U=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}，x=-0.004，y=0.003$$

$X_B=58056.515+(-0.004)=58056.511m$

$Y_B=-8822.834+0.003=-8822.831m$

$v_1=x=-0.004$，$v_2=y=0.003$，$v_3=-x-0.008=-0.004$，$v_4=-0.003+0.006=0.003$

$$[vv]=(-0.004)^2+0.003^2+(-0.004)^2+0.003^2=5\times10^{-5}$$

$$\sigma_o=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}}=\pm\sqrt{\frac{5\times10^{-5}}{4-2}}=\pm0.005m$$

$$\sigma_{X_B}=\sigma_{Y_B}=\pm\sigma_o\times\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\pm0.005\times\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\pm0.0035m$$

B 點坐標及其中誤差

$$B\left(X_B \pm \sigma_{X_B}, Y_B \pm \sigma_{Y_B}\right) = \left(58056.511m \pm 0.0035m, -8822.831m \pm 0.0035m\right)$$