

111 年公務人員高等考試三級考試試題

等 別：三等考試

類 科：測量製圖

科 目：測量平差法（包括誤差理論及實務）

賴明老師

甲、申論題部分：

一、使用全測站儀器測得某方向秒讀數記錄如下：

23.7 14.1 15.1 19.8 19.7 12.9 26.7 12.5 13.6 20.5
 16.5 15.2 18.4 8.2 24.7 16.0 8.5 16.2 23.4 20.9
 18.5 13.3 16.2 19.1 15.4 26.4 18.2 14.9 17.8 13.1

試求此資料組的觀測中誤差，以及最或是值與其中誤差，並在 95% 的信賴水準下說明觀測值是否含有粗差。（ $E_{90}=1.645\sigma$ 、 $E_{95}=1.96\sigma$ 、 $E_{99}=2.57\sigma$ ）（25 分）

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：直接觀測平差。重點提要：持續刪除粗差。

【命中特區】

書名：測量平差 上課教材

作者：賴明

章節出處：第三章 直接觀測平差 之一、等精度（等權）直接觀測平差

【擬答】

已知：30 個某方向秒讀數，編列序號如下：

序號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
讀數	23.7	14.1	15.1	19.8	19.7	12.9	26.7	12.5	13.6	20.5
序號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
讀數	16.5	15.2	18.4	8.2	24.7	16.0	8.5	16.2	23.4	20.9
序號	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
讀數	18.5	13.3	16.2	19.1	15.4	26.4	18.2	14.9	17.8	13.1

(一) 30 個讀數

1. 計算最或是值

30 個讀數之合計=519.5"，最或是值=519.5/30=17.317"

誤差=觀測值-最或是值。30 個讀數之誤差為：

序號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	[vv]
誤差	6.383	-3.217	-2.217	2.483	2.383	-4.417	9.383	-4.817	-3.717	3.183	222.55249
序號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	[vv]
誤差	-0.817	-2.117	1.083	-9.117	7.383	-1.317	-8.817	-1.117	6.083	3.583	274.51289
序號	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	[vv]
誤差	1.183	-4.017	-1.117	1.783	-1.917	9.083	0.883	-2.417	0.483	-4.217	132.77629

[vv]之合計=222.55249+274.51289+132.77629=629.84167

2. 觀測值中誤差 m

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{629.84167}{30-1}} = \pm 4.66''$$
，在 95% 的信賴水準下

粗差 = $1.96m = 1.96 * (\pm 4.66) = \pm 9.1336''$ ，符合粗差原則的誤差，為序號 7，其讀數為 26.7"

(二) 第一次粗差刪除之後

1. 29 個讀數之合計 = $519.5 - 26.7 = 492.8''$ ，最或是值 = $492.8/29 = 17.00''$

誤差 = 觀測值 - 最或是值。29 個讀數之誤差為：

序號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	[vv]
誤差	6.7	-2.9	-1.9	2.8	2.7	-4.1		-4.5	-3.4	3.5	132.91
序號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	[vv]
誤差	-0.5	-1.8	1.4	-8.8	7.7	-1.0	-8.5	-0.8	6.4	3.9	272.24
序號	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	[vv]
誤差	1.5	-3.7	-0.8	2.1	-1.6	9.4	1.2	-2.1	0.8	-3.9	133.61

[vv] 之合計 = $132.91 + 272.24 + 133.61 = 538.76$

2. 觀測值中誤差 m

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{538.76}{29-1}} = \pm 4.386''$$
，在 95% 的信賴水準下

粗差 = $1.96m = 1.96 * (\pm 4.386) = \pm 8.6''$ ，符合粗差原則的誤差，為序號 14，其讀數為 8.2"，誤差 = -8.8；序號 26，其讀數為 26.4"，誤差 = 9.4。

(三) 第二次粗差刪除之後

1. 27 個讀數之合計 = $492.8 - 8.2 - 26.4 = 458.2''$ ，最或是值 = $458.2/27 = 16.97''$

誤差 = 觀測值 - 最或是值。27 個讀數之誤差為：

序號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	[vv]
誤差	6.73	-2.87	-1.87	2.83	2.73	-4.07		-4.47	-3.37	3.53	132.8521
序號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	[vv]
誤差	-0.47	-1.77	1.43		7.73	-0.97	-8.47	-0.77	6.43	3.93	195.2161
序號	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	[vv]
誤差	1.53	-3.67	-0.77	2.13	-1.57		1.23	-2.07	0.83	-3.87	44.8681

[vv] 之合計 = $132.8521 + 195.2161 + 44.8684 = 372.9363$

2. 觀測值中誤差 m

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{372.9363}{27-1}} = \pm 3.787''$$
，在 95% 的信賴水準下

粗差 = $1.96m = 1.96 * (\pm 3.787) = \pm 7.422''$ ，符合粗差原則的誤差，為序號 15，其讀數為 24.7"，誤差 = 7.73；序號 17，其讀數為 8.5"，誤差 = -8.47。

(四) 第三次粗差刪除之後

1. 25 個讀數之合計 = $458.2 - 24.7 - 8.5 = 425.0''$ ，最或是值 = $425.0/25 = 17''$

誤差 = 觀測值 - 最或是值。25 個讀數之誤差為：

序號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	[vv]
誤差	6.7	-2.9	-1.9	2.8	2.7	-4.1		-4.5	-3.4	3.5	132.91
序號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	[vv]

誤差	-0.5	-1.8	1.4			-1.0		-0.8	6.4	3.9	63.26
序號	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	[vv]
誤差	1.5	-3.7	-0.8	2.1	-1.6		1.2	-2.1	0.8	-3.9	45.25

[vv]之合計=132.8521+63.26+45.25=241.42

2. 觀測值中誤差 m

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{241.42}{25-1}} = \pm 3.172''$$
，在 95% 的信賴水準下

粗差=1.96m=1.96*(±3.172)=±6.217''，符合粗差原則的誤差，為序號 1，其讀數為 23.7''，

誤差=6.7；序號 19，其讀數為 23.4''，誤差=6.4。

(五)第四次粗差刪除之後

1. 23 個讀數之合計=425.0-23.7-23.4=377.9''，最或是值=377.9/23=16.43''

誤差=觀測值-最或是值。23 個讀數之誤差為：

序號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	[vv]
誤差	-	-2.33	-1.33	3.37	3.27	-3.53	-	-3.93	-2.83	4.07	81.7272
序號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	[vv]
誤差	0.07	-1.23	1.97	-	-	-0.43	-	-0.23	-	4.47	25.6174
序號	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	[vv]
誤差	2.07	-3.13	-0.23	2.67	-1.03	-	1.77	-1.53	1.37	-3.33	40.7641

[vv]之合計=81.7272+25.6174+40.7641=148.1087

2. 觀測值中誤差 m

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{148.1087}{23-1}} = \pm 2.595''$$
，在 95% 的信賴水準下

粗差=1.96m=1.96*(±2.595)=±5.085''，沒有符合粗差原則的誤差。

3. 最或是值中誤差

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n \cdot (n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{148.1087}{23 \times (23-1)}} = \pm 0.54''$$

觀測中誤差=±2.595''，最或是值=16.43''，其中誤差=±0.54''

志光 保成 學儒

112年 虛實整合

多元學習新型態

重聽OK 旁聽OK

突破傳統上課形式 5大方式彈性又便利

| 面授學習 | 直播學習 | 在家學習 | 視訊學習 | Wifi學習 |

◆學習◆
零時差

同類科各班別
皆可同步直播上課

◆服務◆
零死角

服務緊貼需求
隨時掌握學習狀況

線上
課業諮詢

老師
申論批閱

雙師資
雙循環

多元
補課方式

上榜生
經驗親授

時事
專題講座

歷屆試題
練習

班導師
制度

各班服務略有不同，詳情請洽全國志光、保成、學儒門市

二、以公尺為單位使用全測站儀器測量某一檢定基線 (calibration baseline) 長度四次，計算結果為 1,100.000 m，觀測中誤差為 ± 0.04 m。已知此檢定基線長為 1,100.005 m，試建立一假說測試，檢定儀器測距功能於 0.01 顯著水準下是否正常運作？(計算結果以公尺為單位，四捨五入至小數點下第三位；不同顯著水準不同自由度之 t 分布值如下： $t_{0.01,4} = 3.747$ 、 $t_{0.01,3} = 4.541$ 、 $t_{0.005,4} = 4.604$ 、 $t_{0.005,3} = 5.841$) (20 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：統計檢定。重點提要： t 分布。

【命中特區】

書名：測量平差 上課教材

作者：賴明

章節出處：第八章 誤差分布的統計檢定 之 三、基本的統計檢定方法

【擬答】

已知： $\mu = 1100.005m, \bar{x} = 1100.000m, \hat{\sigma} = \pm 0.04, n = 4$

零假設： $H_0: \bar{x} = \mu$ ，對立假設： $H_1: \bar{x} \neq \mu$

$$\text{統計量 } t = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma} / \sqrt{n}} = \frac{1100.000 - 1100.005}{0.04 / \sqrt{4}} = \frac{-0.005}{0.02} = -0.25$$

顯著水準 $\alpha = 0.01$ ， $\nu = n - 1 = 4 - 1 = 3$ ， $t_{\frac{\alpha}{2}, \nu} = t_{0.005, 3} = 5.841$

判定：如 $|t| < t_{\frac{\alpha}{2}, \nu}$ ，則接受零假設 H_0

$\because |-0.25| = 0.25 < 5.841 = t_{\frac{\alpha}{2}, \nu} = t_{0.005, 3} \therefore$ 接受零假設 H_0

$\therefore$ 該儀器測距功能於 0.01 顯著水準下，是正常運作

志光學儒保成

我變強的祕密

工科題庫班

解析 題目觀念

精選易錯題型
加強觀念解析

強化 解題技巧

以題目授課
加強應考實力

增快 答題速度

加強快速審題
增加取分機會

題庫班老師會將考試內容做統整，並講解解題需注意的點，讓學生在考場上遇到相似題型，不會不知如何著手以及解省時間。

110年高考&鐵路高員電子工程 李○憲 **考取2種考試**



三、一開放導線 ABCD，已知 AB 的方位角為 $345^\circ 16' 29''$ ，其中誤差為 $\pm 4.5''$ ；下列表格分別是觀測之角度與距離及其中誤差，試繪出此開放導線略圖，並計算 BC、CD 方位角及其中誤差，以及 BC 縱距與橫距之中誤差及相關係數。(25 分)

後視	測站	前視	觀測角度	中誤差 (")
A	B	C	$98^\circ 06' 59''$	± 2.8
B	C	D	$85^\circ 56' 57''$	± 2.6
			距離 (m)	中誤差 (m)
B	C		302.49	± 0.012
C	D		254.32	± 0.012

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：方位角推估，誤差傳播定律。

重點提要：相關係數之定義，矩陣運算。

【命中特區】

書名：測量平差 上課教材

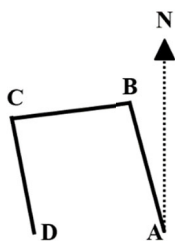
作者：賴明

章節出處：第四章 多變量函數之誤差傳播 之二、非線性函數之誤差傳播定律

【擬答】

已知： $\phi_{AB} = 345^\circ 16' 29''$ ， $\sigma_{\phi_{AB}} = \pm 4.5''$ ； $\angle ABC = 98^\circ 06' 59''$ $\sigma_{\angle ABC} = \pm 2.8''$ ， $\angle BCD = 85^\circ 56' 57''$ ， $\sigma_{\angle BCD} = \pm 2.6''$ $\overline{BC} = 302.49\text{m} = L$ ， $\sigma_{\overline{BC}} = \pm 0.012\text{m} = \sigma_L$

(一)繪出此開放導線略圖：如下圖



(二)計算 BC、CD 方位角及其中誤差

1. 計算 BC 方位角及其中誤差

$$\phi_{BC} = \phi_{AB} - 180^\circ + \angle ABC = 345^\circ 16' 29'' - 180^\circ + 98^\circ 06' 59'' = 263^\circ 23' 28''$$

$$\frac{\partial \phi_{BC}}{\partial \phi_{AB}} = 1, \quad \frac{\partial \phi_{BC}}{\partial \angle ABC} = 1$$

$$\frac{\sigma_{\phi_{BC}}}{\rho''} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \phi_{BC}}{\partial \phi_{AB}}\right)^2 \times \left(\frac{\sigma_{\phi_{AB}}}{\rho''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{BC}}{\partial \angle ABC}\right)^2 \times \left(\frac{\sigma_{\angle ABC}}{\rho''}\right)^2}$$

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{4.5''}{\rho''}\right)^2 + \left(\frac{2.8''}{\rho''}\right)^2}, \quad \sigma_{\phi_{BC}}'' = \pm \sqrt{4.5^2 + 2.8^2} = \pm 5.3''$$

2. 計算 CD 方位角及其中誤差

$$\phi_{CD} = \phi_{BC} - 180^\circ + \angle BCD = 263^\circ 23' 28'' - 180^\circ + 85^\circ 56' 57'' = 169^\circ 20' 25''$$

$$\frac{\partial \phi_{CD}}{\partial \phi_{BC}} = 1, \quad \frac{\partial \phi_{CD}}{\partial \angle BCD} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\phi_{CD}}''}{\rho''} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \phi_{CD}}{\partial \phi_{BC}}\right)^2 \times \left(\frac{\sigma_{\phi_{BC}}''}{\rho''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{CD}}{\partial \angle BCD}\right)^2 \times \left(\frac{\sigma_{\angle BCD}}{\rho''}\right)^2} \\ &= \pm \sqrt{\left(\frac{5.3''}{\rho''}\right)^2 + \left(\frac{2.6''}{\rho''}\right)^2}, \quad \sigma_{\phi_{BC}}'' = \pm \sqrt{5.3^2 + 2.6^2} = \pm 5.9'' \end{aligned}$$

$$\therefore \phi_{BC} = 263^\circ 23' 28'', \quad \phi_{CD} = 169^\circ 20' 25'', \quad \sigma_{\phi_{BC}} = \pm 5.3'', \quad \sigma_{\phi_{CD}} = \pm 5.9''$$

(三) 計算 BC 縱距與橫距之中誤差及相關係數

$$\text{假設：} L = \overline{BC} = 302.49m, \quad \sigma_L = \sigma_{\overline{BC}} = \pm 0.012m$$

$$\phi = \phi_{BC} = 263^\circ 23' 28'', \quad \sigma_\phi = \pm 5.3'';$$

L, ϕ 為獨立的兩個變數，斜方差(協變方) $\sigma_{L\phi} = 0$

$$\Delta E_{BC} = \Delta E = L \cdot \sin \phi, \quad \Delta N_{BC} = \Delta N = L \cdot \cos \phi$$

$$\frac{\partial \Delta E}{\partial L} = \sin \phi, \quad \frac{\partial \Delta E}{\partial \phi} = L \cdot \cos \phi; \quad \frac{\partial \Delta N}{\partial L} = \cos \phi, \quad \frac{\partial \Delta N}{\partial \phi} = -L \cdot \sin \phi$$

$$\Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_L^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\phi^2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{YY} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta E}^2 & \sigma_{\Delta E \Delta N} \\ \sigma_{\Delta E \Delta N} & \sigma_{\Delta N}^2 \end{bmatrix}, \quad \text{由多變量函數誤差傳播定律}$$

$$\Sigma_{YY} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta E}{\partial L} & \frac{\partial \Delta E}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \Delta N}{\partial L} & \frac{\partial \Delta N}{\partial \phi} \end{bmatrix} \times \Sigma_{XX} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta E}{\partial L} & \frac{\partial \Delta E}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \Delta N}{\partial L} & \frac{\partial \Delta N}{\partial \phi} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta E}^2 & \sigma_{\Delta E \Delta N} \\ \sigma_{\Delta E \Delta N} & \sigma_{\Delta N}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin \phi & L \cdot \cos \phi \\ \cos \phi & -L \cdot \sin \phi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_L^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\phi^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sin \phi & L \cdot \cos \phi \\ \cos \phi & -L \cdot \sin \phi \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \sin \phi \cdot \sigma_L^2 & L \cdot \cos \phi \cdot \sigma_\phi^2 \\ \cos \phi \cdot \sigma_L^2 & -L \cdot \sin \phi \cdot \sigma_\phi^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sin \phi & \cos \phi \\ L \cdot \cos \phi & -L \cdot \sin \phi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\Delta E}^2 = \sin^2 \phi \cdot \sigma_L^2 + L^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot \sigma_\phi^2$$

$$= (\sin 263^\circ 23' 28'' \times 0.012)^2 + (302.49 \times \cos 263^\circ 23' 28'' \times 5.3'' / 206265'')^2 = 1.429 \times 10^{-4}$$

$$\sigma_{\Delta N}^2 = \cos^2 \phi \cdot \sigma_L^2 + L^2 \cdot \sin^2 \phi \cdot \sigma_\phi^2$$

$$= (\cos 263^\circ 23' 28'' \times 0.012)^2 + (302.49 \times \sin 263^\circ 23' 28'' \times 5.3'' / 206265'')^2 = 6.152 \times 10^{-5}$$

$$\sigma_{\Delta E \Delta N} = \sin \phi \cdot \cos \phi \cdot (\sigma_L^2 - L^2 \cdot \sigma_\phi^2)$$

$$= \sin 263^\circ 23' 28'' \times \cos 263^\circ 23' 28'' \cdot (0.012^2 - (302.49 \times 5.3'' / 206265''))^2 = 9.556 \times 10^{-6}$$

$$\rho_{\Delta E \Delta N} = \frac{\sigma_{\Delta E \Delta N}}{\sqrt{\sigma_{\Delta E}^2 \times \sigma_{\Delta N}^2}} = \frac{9.556 \times 10^{-6}}{\sqrt{1.429 \times 10^{-4} \times 6.152 \times 10^{-5}}} = 0.102$$

相關係數

公
職



志光學儒保成

跟著工科學長姐們 戰上榜

👑 我們都是前三名 👑

連過三榜 普 考 電子工程【狀元】 曾○富	狀元.榜眼.探花 普 考 電信工程【狀元】鐘○翊 地特四等(竹苗區)電子工程【狀元】詹○凱 地特四等(台中市)電力工程【狀元】柯○訓	地特三等(高雄市)電力工程【榜眼】江○展 普 考 電信工程【探花】王○鎧 地特三等(台北市)電力工程【探花】黃○任 地特五等(台北市)電子工程【探花】柯○輝
--	---	---

👑 110年度優秀考取 👑

高考電力工程 廖○禾 高考電力工程 徐○志 高考電力工程 江○展 高考電力工程 邱○輝 高考電力工程 徐○軒 高考電力工程 曾○倫 高考電力工程 陳○宥 高考電力工程 曾○翔 高考電力工程 李○賢	高考電子工程 林○玄 高考電子工程 張○揚 高考電子工程 李○憲 高考電子工程 游○瑋 高考電子工程 何○勤 高考機械工程 鄭○威 高考機械工程 邱○清 高考機械工程 陳○好 高考機械工程 李○誠	普考機械工程 吳○揚 普考電力工程 吳○翰 普考電力工程 李○誼 普考電力工程 蔡○祐 普考電力工程 黃○堯 普考電力工程 席○棠 普考電力工程 曾○翔 普考電力工程 黃○任 普考電力工程 陳○文	普考電力工程 曾○倫 普考電力工程 賴○綸 普考電力工程 陳○祥 普考電力工程 江○展 普考電力工程 盧○源 普考電力工程 陳○昇 普考電力工程 曾○毅 普考電力工程 黃○豪	普考電子工程 張○揚 普考電子工程 黃○皓 普考電子工程 李○齊 普考電子工程 高○辰 普考電子工程 詹○凱 普考電子工程 蔡○典 普考電子工程 林○玄 普考電子工程 王○延	普考機械工程 李○誠 普考機械工程 陳○好 普考機械工程 許○貴 普考機械工程 李○璇 初等電子工程 柯○輝 地特三等電力工程 張○培 地特四等電力工程 盧○源 地特四等電力工程 蘇○禎 普考電子工程 王○延
--	--	--	--	--	--

因版面有限，無法一一刊登

四、以某測量儀器觀測到 A、B、C、D 四點之 X 、 Y 平面坐標分別是 (1.00, 5.02)、(2.00, 1.98)、(3.00, 3.01) 和 (4.00, 7.99)。假設觀測誤差只存在於 Y 坐標，以最小二乘法擬合拋物線 $Y = aX^2 + bX + c$ 時，僅針對 Y 坐標進行改正，分別用 V_i ($i=A、B、C、D$) 表示，試列出觀測方程式，並說明此平差系統之多餘觀測數為何？以及多餘觀測數之意義；並在觀測量視為等權情形下，計算擬合參數 a 、 b 、 c 之值及其中誤差。(30 分)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：擬合參數，間接觀測平差，多餘觀測數。

重點提要：矩陣運算，3*3反矩陣之解算。

【命中特區】

書名：測量平差 上課教材

作者：賴明

章節出處：第五章 間接觀測平差 之一、多餘觀測數 及 二、等權間接觀測平差

【擬答】

(一)計算多餘觀測數與多餘觀測數之意義

1. 計算多餘觀測數

觀測數=4，未知數=2，多餘觀測數=4-2=2

2. 多餘觀測數之意義

在間接觀測平差中，由 n 個觀測量求解 u 個未知數之函數，且 u 個未知數必須為相互獨立而不相關。當 $n > u$ 時，有多餘觀測而發生平差問題。 $n - u = r$ ， r 為多餘觀測數，亦稱為：自由度。

(二)列出觀測方程式，等權，計算擬合參數 a 、 b 、 c 之值及其中誤差

1. 觀測方程式

$$\begin{cases} 5.02 + v_1 = a + b + c \\ 1.98 + v_2 = 4a + 2b + c \\ 3.01 + v_3 = 9a + 3b + c \\ 7.99 + v_4 = 16a + 4b + c \end{cases}, \begin{cases} v_1 = a + b + c - 5.02 \\ v_2 = 4a + 2b + c - 1.98 \\ v_3 = 9a + 3b + c - 3.01 \\ v_4 = 16a + 4b + c - 7.99 \end{cases}, V = AX - L$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 5.02 \\ 1.98 \\ 3.01 \\ 7.99 \end{bmatrix}$$

2. 組法方程式 $NX = U$ ， $N = A^T A$ ， $U = A^T L$ ， $X = N^{-1}U$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5.02 \\ 1.98 \\ 3.01 \\ 7.99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 167.87 \\ 49.97 \\ 18.00 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 4 \end{vmatrix}} \times \begin{bmatrix} 20 & -100 & 100 \\ -100 & 516 & -540 \\ 100 & -540 & 620 \end{bmatrix} = \frac{1}{80} \times \begin{bmatrix} 20 & -100 & 100 \\ -100 & 516 & -540 \\ 100 & -540 & 620 \end{bmatrix}$$

$$X = N^{-1}U = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & -10 & 10 \\ -10 & 51.6 & -54 \\ 10 & -54 & 62 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 167.87 \\ 49.97 \\ 18.00 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 16.04 \\ -72.248 \\ 96.32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.005 \\ -9.031 \\ 12.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

3. 計算最或是值

$$v_1 = a + b + c - 5.02 = -0.006, \quad v_2 = 4a + 2b + c - 1.98 = 0.018$$

$$v_3 = 9a + 3b + c - 3.01 = -0.018, \quad v_4 = 16a + 4b + c - 7.99 = 0.006$$

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = 0.00072$$

$$\hat{\sigma}_o = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} = \pm \sqrt{\frac{0.00072}{4-2}} = \pm 0.0268, \quad \hat{\sigma}_a = \pm \hat{\sigma}_o \times \sqrt{\frac{2}{8}} = \pm 0.0268 \times \frac{1}{2} = \pm 0.013$$

$$\hat{\sigma}_b = \pm \hat{\sigma}_o \times \sqrt{\frac{51.6}{8}} = \pm 0.068, \quad \hat{\sigma}_c = \pm \hat{\sigma}_o \times \sqrt{\frac{62}{8}} = \pm 0.075$$

$$\therefore a = 2.005, \quad b = -9.031, \quad c = 12.04$$

$$\hat{\sigma}_a = \pm 0.013, \quad \hat{\sigma}_b = \pm 0.068, \quad \hat{\sigma}_c = \pm 0.075$$