

111 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電子工程

科 目：電磁學

陳銘老師

一、考慮一半徑為 R 的圓球，其球心置於原點，其外部電荷為零，內部電荷分布為 $\rho(r)=\rho_0(r/R)$ ， ρ_0 為一常數。(每小題 10 分，共 20 分)

(一)計算在 $r < R$ 處的電場。(二)計算在 $r > R$ 處的電場。

1. 《考題難易》：

★★：簡單

2. 《破題關鍵》：

使用高斯定律解題

【擬答】

(一) $0 \leq r \leq R$ ：可使用高斯定律

$$E(R) \times 4\pi r^2 = \frac{\int_0^r \frac{\rho_0 r}{R} 4\pi r^2 dr}{\epsilon_0} = \frac{\pi \rho_0 r^4}{R \epsilon_0} \Rightarrow E_{in} = \frac{\pi \rho_0 r^2}{4R \epsilon_0}$$

(二) $r \geq R$ ：

$$E(R) \times 4\pi r^2 = \frac{\int_0^R \frac{\rho_0 r}{R} 4\pi r^2 dr}{\epsilon_0} = \frac{\pi \rho_0 R^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{out} = \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2}$$

二、(一)考慮一條沿 z 軸擺放的細導線，其半徑為零，從 $z = -\infty$ 延伸到 $z = \infty$ ，沿著細導線流通電流 I (amp)，從 $z = -\infty$ 流向 $z = \infty$ 。計算在 $(x, y, z) = (x_0, 0, 0)$ 處的磁場。(10 分)

(二)考慮一條細導線，其半徑為零，將該細導線繞成封閉環狀，環的半徑為 a ，並將該環擺放在 xy 平面上，其圓心位在原點。沿著環流通電流 I (amp)，若以右手大拇指平行 z 軸方向，則電流繞右手其餘四指方向流通。計算在 z 軸上的磁場。(10 分)

1. 《考題難易》：

★★：簡單

2. 《破題關鍵》：

使用 Biot-Savart 定律解題即可

【擬答】

$$(一) \vec{H} = \hat{a}_\phi \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{rdz'}{(z^2 + x_0^2)^{3/2}} = \hat{a}_\phi \frac{Ix_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{x_0^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{x_0^2 + z^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{I}{2\pi x_0} \hat{a}_\phi$$

(二)使用 Biot-Savart 定理

$$d\vec{l}' = \hat{a}_\phi a d\phi', \quad \vec{R} = \hat{z}z - \hat{a}_r a, \quad R = (z^2 + a^2)^{1/2}$$

$$d\vec{l}' \times \vec{R} = \left(\hat{a}_\phi a d\phi' \right) \times \left(z\hat{z} - a\hat{a}_r \right) = \hat{a}_r a z d\phi' + \hat{z} a^2 d\phi'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{a}_r a z + \hat{z} a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\phi' = \hat{z} \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

則

$$\vec{H} = \vec{z} \frac{Ia^2}{2(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

三、在 xy 平面下方($z < 0$)為介質一，介電係數及導磁係數為 (ϵ_1, μ_1) 。在 xy 平面上方($z > 0$)為介質二，介電係數及導磁係數為 (ϵ_2, μ_2) 。一平面波自下方入射，其磁場表達式為 $\vec{H}^i = \hat{y}H_0 e^{-jk_x x - jk_z z}$ ，在介質一產生一反射波，其磁場表達式為 $\vec{H}^r = \hat{y}RH_0 e^{-jk_{rx}x + jk_{rz}z}$ ，在介質二產生一折射波，其磁場表達式為 $\vec{H}^t = \hat{y}TH_0 e^{-jk_{tx}x - jk_{tz}z}$ 。

- (一)推导入射波、反射波、折射波的電場表達式。(10 分)
- (二)列出入射波、反射波、折射波的波數向量色散條件。(5 分)
- (三)從在 $z=0$ 的邊界條件推論相位匹配條件， $k_x = k_{rx} = k_{tx}$ 。(5 分)
- (四)從在 $z=0$ 的邊界條件推出反射係數 R 和折射係數 T 的表達式。(10 分)

1. 《考題難易》

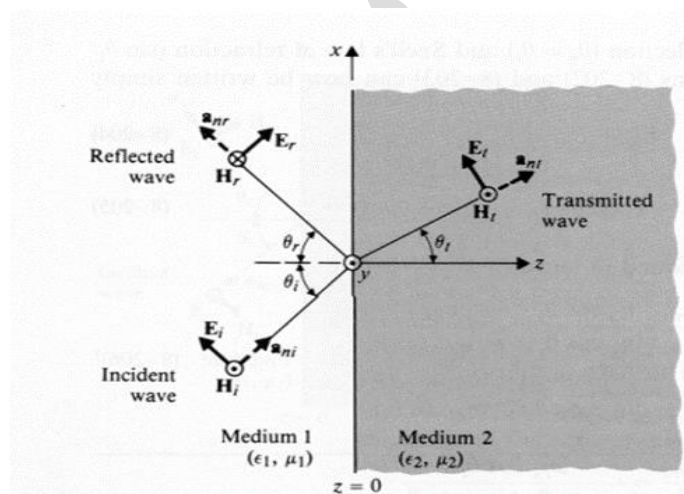
★★★★：困難

2. 《破題關鍵》：

研究 TM 波在不同介質下的入射反射與折射情況

【擬答】

(一)如圖所示



入射波電場為

$$\vec{E}_i = \frac{1}{j\omega\epsilon_1} \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_0 e^{-jk_x x - jk_z z} & 0 \end{vmatrix} = \frac{H_0}{\omega\epsilon_1} \left(\vec{x} k_z - \vec{z} k_x \right) e^{-jk_x x - jk_z z}$$

反射波電場與反射波電場為同一介質，則

$$\vec{E}_r = \frac{RH_0}{\omega\epsilon_1} \left(-\vec{x} k_z - \vec{z} k_x \right) e^{-jk_{rx}x + jk_{rz}z}$$

折射波與入射波分別在不同的介質中，則

$$\vec{E}_t = \frac{TH_0}{\omega\epsilon_2} \left(\vec{x} k_{tz} - \vec{z} k_{tx} \right) e^{-jk_{tx}x - jk_{tz}z}$$

(二)波數向量色散條件要滿足

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{v}; \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

(三) Continuity of tangential field components at $z=0 \Rightarrow k_x = k_{rx} = k_{tx}$

(四) 1. $z=0$ ，則磁場切線連續

$$1+R = \frac{\eta_1}{\eta_2} T$$

2. $z=0$ ，則電場切線連續

可解出

$$R_P = \frac{\eta_1 \cos \theta_1 - \eta_2 \cos \theta_2}{\eta_1 \cos \theta_1 + \eta_2 \cos \theta_2}$$

$$T_P = \frac{2\eta_2 \cos \theta_1}{\eta_1 \cos \theta_1 + \eta_2 \cos \theta_2}$$

志光 學儒 保成

我同時考取4種工科考試



跟著**連過4榜**的學長 掌握關鍵科目解題技巧

不考取不放棄！我選擇**考取班**

推薦給正在準備工科考試的你！

基本電學是全部學科的根基，跟著老師的課程，從解釋概念到掌握電路的解題技巧，成為你的上榜關鍵秘笈。

盧○源

普考 電力工程 / 鐵路特考 佐級電子工程 / 國營聯招新進職員 電機(二) / 地方特考 四等 電力工程(高市)

你還有這些機會!!

鐵路特考

高普考

地方特考

自來水評價人員

台電僱員

中油僱員

國營聯招職員級

志光
保成
學儒



112年 虛實整合

多元學習新型態

重聽OK
旁聽OK



突破傳統上課形式 **5大方式**彈性又便利

| 面授學習 | 直播學習 | 在家學習 | 視訊學習 | Wifi學習 |

◆學習◆
零時差

同類科各班別
皆可同步直播上課

◆服務◆
零死角

服務緊貼需求
隨時掌握學習狀況



線上
課業諮詢



老師
申論批閱



雙師資
雙循環



多元
補課方式



上榜生
經驗親授



時事
專題講座



歷屆試題
練習



班導師
制度

各班服務略有不同，詳情請洽全國志光、保成、學儒門市

公職王歷屆試題 (111 高考三級)

- 四、將兩片無限大的金屬平板平行於 yz 平面擺放，使該兩片金屬板的 x 坐標分別為 $x=0$ 及 $x=a$ 。當 TE (transverse electric) 波模態在兩片金屬板間傳播時，令其電場為 $\vec{E} = \hat{y}E_0 \sin(k_x x) e^{-jk_z z}$ 。
- (一)從邊界條件推論 k_x 的可能解。(5 分)
- (二)推導對應的磁場表達式。(10 分)
- (三)推導對應的複數 (complex) Poynting 向量 z 分量的表達式。(10 分)
- (四)推導使複數 (complex) Poynting 向量 z 分量為實數時的頻率條件。(5 分)

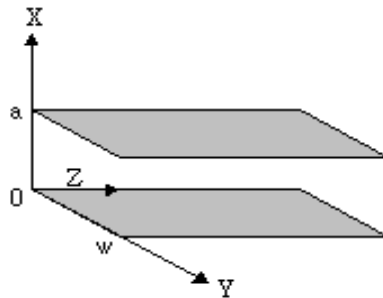
1. 《考題難易》：

★★★★：困難

2. 《破題關鍵》：

需熟悉平行波導管方程式

【擬答】



(一) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_y + \omega^2 \mu \epsilon E_y = 0$ ，根據邊界條件 $X(x=0) = X(x=a) = 0$ 與正 z 軸移動，可得

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-jk_z z}$$

其中 m 為非零之整數

$$(二) \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{-j\omega\mu} \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0 \sin(k_x x) e^{-jk_z z} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{E_0}{-j\omega\mu} \left(\vec{x} jk_z \sin(k_x x) + \vec{z} k_x \cos(k_x x) \right) e^{-jk_z z}$$

(三) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$ ，向量 z 分量的表達式為

$$\frac{k_z E_0^2 \sin^2(k_x x)}{\omega\mu}$$

(四) k_x 與 k_z 需滿足

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow k_z = \left[\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

由上式看出 k_z 需要為實數，TE 波才能行進，則要滿足下列式子

$$\omega^2 \mu \epsilon \geq \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \Rightarrow \omega \geq \frac{m\pi}{a} \times \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \Rightarrow f \geq \frac{m\pi}{2\pi a} \times \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$