111 年公務人員高等考試三級考試試題

類　科：電子工程
科　目：電磁學

陳銘老師

一、考慮一半徑為 R 的圓球，其球心置於原點，其外部電荷為零，內部電荷分布為$\rho(r)=\rho_0(r/R)$，ρ_0為一常數。（每小題 10 分，共 20 分）
㈠計算在 r＜R 處的電場。
㈡計算在 r>R 處的電場。

1.《考題難易》： ★★：簡單 *2.*《破題關鍵》： 使用高斯定律解題

【擬答】

㈠$0\le r\le R$：可使用高斯定律

$$E(R)\times 4\pi r^2=\frac{\int_0^r \frac{\rho_0 r}{R}4\pi r^2 dr}{\varepsilon_0}=\frac{\pi\rho_0 r^4}{R\varepsilon_0}\Rightarrow E_{in}=\frac{\pi\rho_0 r^2}{4R\varepsilon_0}$$

㈡$r\ge R$：

$$E(R)\times 4\pi r^2=\frac{\int_0^R \frac{\rho_0 r}{R}4\pi r^2 dr}{\varepsilon_0}=\frac{\pi\rho_0 R^3}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_{out}=\frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r^2}$$

二、㈠考慮一條沿 z 軸擺放的細導線，其半徑為零，從$z=-\infty$延伸到$z=\infty$，沿著細導線流通電流 I(amp)，從$z=-\infty$流向$z=\infty$。計算在 $(x,y,z)=(x_0,0,0)$處的磁場。（10 分）
㈡考慮一條細導線，其半徑為零，將該細導線繞成封閉環狀，環的半徑為 a，並將該環擺放在 xy 平面上，其圓心位在原點。沿著環流通電流 I(amp)，若以右手大拇指平行 z 軸方向，則電流繞右手其餘四指方向流通。計算在 z 軸上的磁場。（10 分）

1.《考題難易》： ★★：簡單 *2.*《破題關鍵》： 使用 Biot-Savart 定律解題即可

【擬答】

㈠$\vec{H}=\hat{a}_\varphi\frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rdz'}{(z'^2+x_0^2)^{\frac{3}{2}}}=\hat{a}_\varphi\frac{Ix_0}{4\pi}\cdot\frac{1}{x_0^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{x_0^2+z^2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{I}{2\pi x_0}\overrightarrow{a_\varphi}$

㈡使用 Biot-Savart 定理

$$d\vec{l}'=\hat{a}_\varphi a d\varphi',\ \vec{R}=\hat{z}z-\hat{a}_r a,\ R=(z^2+a^2)^{1/2}$$

$$d\vec{l}'\times\vec{R}=\left(a_\phi\hat{a}d\phi\right)\times\left(z\hat{z}-a\hat{a}_r\right)=\hat{a}_r azd\phi'+\hat{z}a^2d\phi'$$

$$\vec{B}=\frac{\mu oI}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\hat{a}_r az+\hat{z}a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}}d\varphi'=\hat{z}\frac{\mu oIa^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$$

則

$$\vec{H}=\vec{z}\frac{Ia^2}{2(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

三、在 xy 平面下方(z<0)為介質一，介電係數及導磁係數為(ϵ_1,μ_1)。在 xy 平面上方(z>0)為介質二，介電係數及導磁係數為(ϵ_2,μ_2)。一平面波自下方入射，其磁場表達式為$\bar{H}^i=\hat{y}H_0e^{-jk_xx-jk_zz}$，在介質一產生一反射波，其磁場表達式為$\bar{H}^r=\hat{y}RH_0e^{-jk_{rx}x+jk_{rz}z}$，在介質二產生一折射波，其磁場表達式為$\bar{H}^t=\hat{y}TH_0e^{-jk_{tx}x-jk_{tz}z}$。

㈠推導入射波、反射波、折射波的電場表達式。（10 分）

㈡列出入射波、反射波、折射波的波數向量色散條件。（5 分）

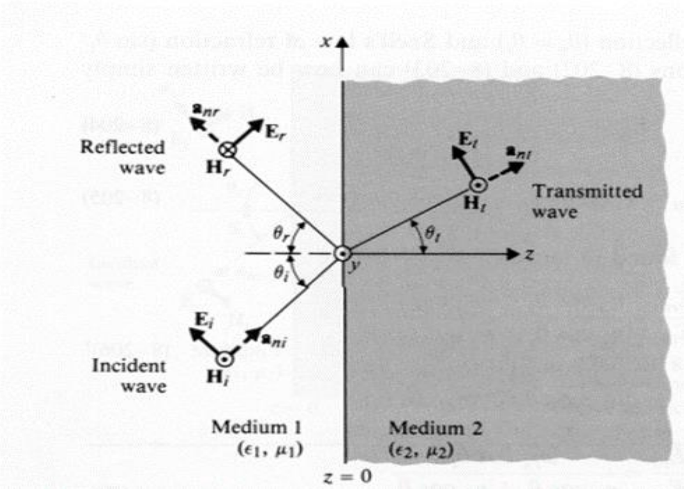
㈢從在 z=0 的邊界條件推論相位匹配條件，$k_x=k_{rx}=k_{tx}$。（5 分）

㈣從在 z=0 的邊界條件推出反射係數 R 和折射係數 T 的表達式。（10 分）

1.《考題難易》 ★★★★：困難 2.《破題關鍵》： 研究 TM 波在不同介質下的入射反射與折射情況

【擬答】

㈠如圖所示



入射波電場為

$$\vec{E}_i=\frac{1}{j\omega\varepsilon_1}\begin{vmatrix}\vec{x} & \vec{y} & \vec{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & H_0e^{-jk_xx-jk_zz} & 0\end{vmatrix}=\frac{H_0}{\omega\varepsilon_1}\left(\vec{x}k_z-\vec{z}k_x\right)e^{-jk_xx-jk_zz}$$

反射波電場與反射波電場為同一介質，則

$$\vec{E}_r=\frac{RH_0}{\omega\varepsilon_1}\left(-\vec{x}k_z-\vec{z}k_x\right)e^{-jk_{rx}x+jk_{rz}z}$$

折射波與入射波分別在不同的介質中，則

$$\vec{E}_t=\frac{TH_0}{\omega\varepsilon_2}\left(\vec{x}k_{tz}-\vec{z}k_{tx}\right)e^{-jk_{tx}x-jk_{tz}z}$$

㈡波數向量色散條件要滿足

$$k_x^2+k_z^2=k^2=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{\omega}{v};\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

㈢ Continuity of tangential field components at z=0⇒$k_x = k_{rx} = k_{tx}$

㈣ *1.* z=0，則磁場切線連續

$$1+R=\frac{\eta_1}{\eta_2}T$$

2. z=0，則電場切線連續

可解出

$$R_P=\frac{\eta_1\cos\theta_1-\eta_2\cos\theta_2}{\eta_1\cos\theta_1+\eta_2\cos\theta_2}$$

$$T_P=\frac{2\eta_2\cos\theta_1}{\eta_1\cos\theta_1+\eta_2\cos\theta_2}$$

四、將兩片無限大的金屬平板平行於 yz 平面擺放，使該兩片金屬板的 x 坐標分別為 x=0 及 x= a。當 TE（transverse electric）波模態在兩片金屬板間傳播時，令其電場為 $\bar{E} = \hat{y}E_0 \sin(k_x x)\, e^{-jk_z z}$。

㈠從邊界條件推論 k_x 的可能解。（5 分）

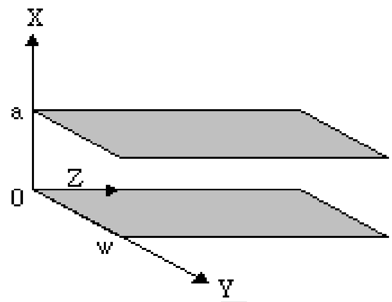
㈡推導對應的磁場表達式。（10 分）

㈢推導對應的複數（complex）Poynting 向量 z 分量的表達式。（10 分）

㈣推導使複數（complex）Poynting 向量 z 分量為實數時的頻率條件。（5 分）

1.《考題難易》： ★★★★：困難 2.《破題關鍵》： 需熟悉平行波導管方程式

【擬答】



㈠$\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_y+\omega^2\mu\varepsilon E_y=0$，根據邊界條件 $X(x=0)=X(x=a)=0$ 與正 z 軸移動，可得

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{-jk_z z}$$

其中 m 為非零之整數

㈡$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$

$$\vec{H}=\frac{1}{-j\omega\mu}\begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0\sin(k_x x)e^{-jk_z z} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{E_0}{-j\omega\mu}\left(\vec{x}\, jk_z \sin(k_x x)+\vec{z}\, k_x \cos(k_x x)\right)e^{-jk_z z}$$

㈢$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$，向量 z 分量的表達式為

$$\frac{k_z E_0^2 \sin^2(k_x x)}{\omega\mu}$$

㈣k_x與k_z需滿足

$$k_x{}^2 + k_z{}^2 = k^2 = \omega^2\mu\varepsilon \Rightarrow k_z = \left[\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

由上式看出 k_z 需要為實數，TE 波才能行進，則要滿足下列式子

$$\omega^2\mu\varepsilon \ge \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \Rightarrow \omega \ge \frac{m\pi}{a}\times\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \Rightarrow f \ge \frac{m\pi}{2\pi a}\times\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$