111 年公務人員高等考試三級考試試題

類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時

吳迪老師解題

甲、申論題部分：(50 分)

一、我們考慮空間中的三個向量：$\vec{a}=(-3,-2,1)$、$\vec{b}=(2,4,-5)$、$\vec{c}=(-1,-1,3)$(每小題 6 分，共 12 分)

㈠請計算$\vec{a}$、$\vec{b}$所圍出的平行四邊形的面積。

㈡請計算$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$所圍出的平行六面體的體積。

1.《考題難易》：★
2.《解題關鍵》：考向量的應用,基本題
3.《命中特區》：吳迪著"工程數學"P9-8~P9-9

【擬答】：

㈠

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 4 & -5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -3\\ -5 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 2 & 4\end{vmatrix}\right)$$

$=$(6,-13 -8)

$\vec{a},\vec{b}$所圍平行四邊形的面積

$$=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{6^2+(-13)^2+(-8)^2}=\sqrt{269}$$

㈡ $V=\left\|\begin{matrix}-3 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -5\\ -1 & -1 & 3\end{matrix}\right\|=17$

二、考慮如下所示之初始值問題(initial-value problem)：$\left(y'=\dfrac{dy}{dx},y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$

$$\begin{cases}\text{微分方程式：}y''+3y'+2y=x\\ \text{初始條件：}y(0)=0\text{、}y'(0)=0\end{cases}$$

(每小題 7 分，共 14 分)

㈠請求出本題目中之微分方程式的齊次解(homogeneous solution)，該齊次解應為一般形式(general form)解。

㈡請求出本初始值問題的精確解(exact solution)。

1.《考題難易》：★★
2.《解題關鍵》：考二階常微分方程的齊次解及特解
3.《命中特區》：吳迪著"工程數學"P2-7~P2-18

【擬答】：

㈠$y''+3y'+2y=0$

令$y=e^{\lambda x}$代入得特徵方程式

$\lambda^2+3\lambda+2=0\Rightarrow(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

$\Rightarrow\lambda=-1,-2$

$\therefore y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

㈡令 $D=\frac{d}{d_x}, D^2=\frac{d^2}{dx^2}$

$$\Rightarrow (D^2+3D+2)y=x$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{D^2+3D+2}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}D+\cdots\right)x$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$$

$$\therefore y=y_h+y_p=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$$

$$y'=-c_1e^{-x}-2c_2e^{-2x}+\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y(0)=0\Rightarrow c_1+c_2-\frac{3}{4}=0 \\ y'(0)=0\Longrightarrow -c_1-2c_2+\frac{1}{2}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1=1, C_2=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore y=e^{-x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$$

三、我們準備從一疊標準的撲克牌[共 52 張牌，沒有鬼牌（Joker）]裡面來隨機抽牌。（每小題 6 分，共 12 分）

㈠假設我們的抽牌方式是：抽牌看了結果以後會把牌再放回原來那疊撲克牌裡面；在這種情況之下，我們會剛好在第 6 次抽牌的時候首度抽到王牌（ACE）的機率為何？

㈡假設我們的抽牌方式是：抽牌看了結果以後不會把牌放回原來那疊撲克牌裡面（也就是會把牌往旁邊擺）；在這種情況之下，我們會剛好在第 6 次抽牌的時候首度抽到王牌（ACE）的機率為何？

1.《考題難易》：★
2.《解題關鍵》：考古典機率, 基本題
3.《命中特區》：吳迪著”工程數學”P7-3~P7-6

【擬答】：

㈠ $p=\left(\frac{12}{13}\right)^5\left(\frac{1}{13}\right)=0.0516$

㈡ $p=\left(\frac{48}{52}\right)\left(\frac{47}{51}\right)\left(\frac{46}{50}\right)\left(\frac{45}{49}\right)\left(\frac{44}{48}\right)\left(\frac{4}{47}\right)=0.0516$

四、在本題目中，我們考慮複變函數（complex-valued function）沿著曲線（contour）做積分（integral）的問題。我們用 Γ 代表在複數平面上的單位圓（也就是以座標系的原點為圓心而且半徑為 1 的圓）之中從 $1+i\cdot 0(i=\sqrt{-1})$ 以逆時針方向繞一圈走回到原出發點的曲線。請計算下列兩個積分的結果。（每小題 6 分，共 12 分）

(一) $\int_{\Gamma} z\,dz = ?$

(二) $\int_{\Gamma} \frac{1}{z}\,dz = ?$

1.《考題難易》：★★
2.《解題關鍵》：考複積分, 基本題
3.《命中特區》：吳迪著”工程數學”P10-18~P10-25

【擬答】：

(一)令 f(z)=z，且 f(z)在 Γ 內解析

$\Rightarrow f_{\Gamma zdz} = 0$

(二)令 $f(z)=\frac{1}{Z}$，且 z=0 在 c 內為奇異點 $\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0}\{f(z)\} = \operatorname*{lin}_{z\to 0} z\times\frac{1}{z} = 1$

$\Rightarrow \int_{\Gamma}\frac{1}{z}dz = 2\pi i\times 1 = 2\pi i$

乙、測驗題部分：(50 分)

(B) *1.* 假設 *A* 與 *B* 為維度相同之方陣（squarematrix）且 A, B, A+B 均為可逆（invertible）矩陣，則下列何者不一定為可逆矩陣？

(A) A^TB　(B) I+AB　(C) $I+A^{-1}B$　(D) $I+AB^{-1}$

(C) *2.* 假設矩陣 $A=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 2 & 6\\ 0 & 7 & 3\end{vmatrix}$，$B=\begin{vmatrix}1 & -3 & 0\\ -2 & 4 & 1\\ 5 & -2 & 2\end{vmatrix}$，則行列式值 $\det(2A^TB^{-1})$為何？

(A) $\frac{12}{17}$　(B) $-\frac{12}{17}$　(C) $-\frac{48}{17}$　(D) $\frac{48}{17}$

(A) *3.* 若 $P_{B\leftarrow B'}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$ 為從 R^3 的基底 B 轉換至基底 $B'=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$之轉移矩陣（transition matrix），則 B=？

(A) $\{(3,2,2),(2,1,0),(4,4,1)\}$　(B) $\{(3,4,2),(2,1,2),(2,0,1)\}$

(C) $\{(3,1,2),(1,2,1),(4,1,4)\}$　(D) $\{(3,2,1),(1,2,0),(2,1,0)\}$

(C) 4. 下列那一個矩陣無法被對角化（diagonalizable）

(A) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(D) 5. 下列那一組 R^3 中之向量基於歐幾里得內積（Euclidean inner product）可作為規格化正交基底（orthonormal basis）？

(A) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$，$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

(D) $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

(D) 6. 設 T 是 R^3 到 R^2 的線性轉換，$T\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$，$T\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$，$T\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$T\left[\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，下列何者正確？

(A) a-b=8 (B) a-b=10 (C) a+b=10 (D) a+b=8

(B) 7. 矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \\ 6 & -2 & 4 & 14 \end{bmatrix}$ 的LU 分解（LU decomposition），可化為 $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -2x \end{bmatrix}$，x=？

(A) x=1 (B) x=2 (C) x=3 (D) x=4

(C) 8. 設 α 和 β 為矩陣 $A=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ 之特徵值（eigenvalues），則 $\alpha\beta+\alpha+\beta=$？

(A).3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

(A) 9. 定義 $i=\sqrt{-1}$，若 $z=a+bi$ 為 $z^2-(6-2i)z+17-6i=0$ 之一解，且 $ab>0$，則 $a^2+b^2=$?

(A) 13 (B) 15 (C) 18 (D) 20

(C) 10. 定義 $i=\sqrt{-1}$，複變數 $z=x+iy$ 與其共軛複數 $\bar{z}=x-iy$。下列那一個複變函數為完整（entire），即在整個複數平面皆為可解析（analytic）？

(A) $f(z)=iz\bar{z}$ (B) $f(z)=x^2+y^2+i2xy$

(C) $f(z)=e^{-x}(\cos y-i\sin y)$ (D) $f(z)=\bar{z}$

(B) 11. 複變級數 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^n}$ 之收斂半徑（radius of convergence）為何？$(i=\sqrt{-1})$

(A) 1 (B) ∞ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

(B) 12. 計算 $\int_{\gamma}\bar{z}dz=$？其中軌跡 $\gamma(t)=e^{it}$, $0\le t\le\pi$。$\left(i=\sqrt{-1}\right)$

(A) $-\pi i$ (B) πi (C) $-2\pi i$ (D) $2\pi i$

(C) 13. 一階常微分方程式 $e^{x+y}y'=3x$，下列何者為正確的解答？$\left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$

(A) $e^{-y}=-3e^{-x}(x+1)+c$，其中 c 為常數 (B) $e^{y}=-3e^{x}(x+2)+c$，其中 c 為常數

(C) $e^{y}=-3e^{-x}(x+1)+c$，其中 c 為常數 (D) $e^{-y}=-3e^{-x}(x+2)+c$，其中 c 為常數

(C) 14. 二階微分方程式 $x^2y''-9xy'+24y=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=10$，設 $y=ax^6+bx^5+cx^4+dx^3$ 為其解，下列何者正確？$\left(y'=\dfrac{dy}{dx},\ y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$

(A) a=1　(B) b=−1　(C) c=−2　(D) d=−4

(A) 15. 反拉普拉斯轉換（inverse Laplace transform）

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-3}{s^2+2s+2}+\dfrac{s}{s^2+2s+1}\right\}=e^{-t}(a\cos t+b\sin t+ct+d)$，a, b, c, d 為常數，則：

(A) a+b+c+d=−3　(B) a+b+c+d=−4　(C) a+b+c+d=3　(D) a+b+c+d=4

(D) 16. 假設 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-1)^2}\right\}$，其中 $\mathcal{L}^{-1}$ 為反拉普拉斯轉換（inverse Laplace transform），下列何者正確？

(A) f(0)=-1　(B) f(0)=1　(C) f(1)=-1　(D) f(1)=1

(C) 17. 定義傅立葉轉換 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$，令 $f(x)=\begin{cases}5 & ,-3\le x\le 3\\ 0 & ,x<-3\text{或}x>3\end{cases}$，$F(\omega)=$？$\left(i=\sqrt{-1}\right)$

(A) $\dfrac{6}{\omega}\sin(5\varpi)$　(B) $\dfrac{6}{\omega}\cos(5\varpi)$　(C) $\dfrac{10}{\omega}\sin(3\varpi)$　(D) $\dfrac{10}{\omega}\sin(3\varpi)$

(C) 18. 若 X 為一連續均勻分布（uniformly distributed）在區間(0, 20)之隨機變數，可計算得知 X＜10 之機率為 a，X＞12 之機率為 b，8＜X＜16 之機率為 c，則 a+b+c=？

(A) $\dfrac{11}{10}$　(B) $\dfrac{6}{5}$　(C) $\dfrac{13}{10}$　(D) $\dfrac{7}{5}$

(D) 19. 將一副正常的撲克牌（52 張牌包含四種花色：黑桃、方塊、紅心、梅花，每種花色各 13 張牌，ACE 為各花色點數 1 的牌）隨機均分為 4 疊，每疊各 13 張牌。這四疊牌每疊恰好包含一張 ACE 牌的機率為何？

(A) $\dfrac{1}{13}$　(B) $\dfrac{927}{2550}$　(C) $\dfrac{783}{2450}$　(D) $\dfrac{2197}{20825}$

(A) 20. 設 X 和 Y 為連續隨機變數，其聯合機率密度函數（joint probability density function）

$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}2 & ,0\le y\le x\le 1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$，令 W=Y/X，期望值 E(W)=？

(A) 1/2　(B) 1　(C) 3/2　(D) 2