

111 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

吳迪老師解題

甲、申論題部分：(50 分)

一、我們考慮空間中的三個向量： $\vec{a} = (-3, -2, 1)$ 、 $\vec{b} = (2, 4, -5)$ 、 $\vec{c} = (-1, -1, 3)$ (每小題 6 分，共 12 分)

(一)請計算 \vec{a} 、 \vec{b} 所圍出的平行四邊形的面積。

(二)請計算 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 所圍出的平行六面體的體積。

1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：考向量的應用, 基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P9-8~P9-9

【擬答】：

(一)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (6, -13, -8)$$

\vec{a}, \vec{b} 所圍平行四邊形的面積

$$= |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-13)^2 + (-8)^2} = \sqrt{269}$$

$$(二) V = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 17$$

二、考慮如下所示之初始值問題 (initial-value problem)： $\left(y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \right)$

$$\begin{cases} \text{微分方程式：} y'' + 3y' + 2y = x \\ \text{初始條件：} y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

(每小題 7 分，共 14 分)

(一)請求出本題目中之微分方程式的齊次解 (homogeneous solution)，該齊次解應為一般形式 (general form) 解。

(二)請求出本初始值問題的精確解 (exact solution)。

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考二階常微分方程的齊次解及特解
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P2-7~P2-18

【擬答】：

$$(一) y'' + 3y' + 2y = 0$$

令 $y = e^{\lambda x}$ 代入得特徵方程式

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1, -2$$

$$\therefore y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$(\text{二}) \text{ 令 } D = \frac{d}{dx}, D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\Rightarrow (D^2 + 3D + 2)y = x$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2 + 3D + 2} x$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}D + \dots \right) x$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

$$\therefore y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

$$y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 - \frac{3}{4} = 0 \\ y'(0) = 0 \Rightarrow -c_1 - 2c_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore y = e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

三、我們準備從一疊標準的撲克牌[共 52 張牌，沒有鬼牌(Joker)]裡面來隨機抽牌。(每小題 6 分，共 12 分)

(一)假設我們的抽牌方式是：抽牌看了結果以後會把牌再放回原來那疊撲克牌裡面；在這種情況之下，我們會剛好第 6 次抽牌的時候首度抽到王牌 (ACE) 的機率為何？

(二)假設我們的抽牌方式是：抽牌看了結果以後不會把牌放回原來那疊撲克牌裡面 (也就是會把牌往旁邊擺)；在這種情況之下，我們會剛好第 6 次抽牌的時候首度抽到王牌 (ACE) 的機率為何？

1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：考古典機率, 基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P7-3~P7-6

【擬答】：

$$(\text{一}) p = \left(\frac{12}{13}\right)^5 \left(\frac{1}{13}\right) = 0.0516$$

$$(\text{二}) p = \left(\frac{48}{52}\right) \left(\frac{47}{51}\right) \left(\frac{46}{50}\right) \left(\frac{45}{49}\right) \left(\frac{44}{48}\right) \left(\frac{4}{47}\right) = 0.0516$$

四、在本題目中，我們考慮複變函數 (complex-valued function) 沿著曲線 (contour) 做積分 (integral) 的問題。我們用 Γ 代表在複數平面上的單位圓 (也就是以座標系的原點為圓心而且半徑為 1 的圓) 之中從 $1+i \cdot 0 (i = \sqrt{-1})$ 以逆時針方向繞一圈走回到原出發點的曲線。請計算下列兩個積分的結果。(每小題 6 分，共 12 分)

(一) $\int_{\Gamma} z dz = ?$

(二) $\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = ?$

1. 《考題難易》：★★★
 2. 《解題關鍵》：考複積分, 基本題
 3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P10-18~P10-25

【擬答】：

(一) 令 $f(z)=z$ ，且 $f(z)$ 在 Γ 內解析

$\Rightarrow \int_{\Gamma} z dz = 0$

(二) 令 $f(z) = \frac{1}{z}$ ，且 $z=0$ 在 c 內為奇異點 $\Rightarrow \text{Res}\{f(z)\}_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} z \times \frac{1}{z} = 1$

$\Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \times 1 = 2\pi i$

志光學需保成 跟著工科學長姐們 戰上榜

我們都是前三名

<p>連過三榜 普考 電子工程【狀元】 曾○富 地特四等電子工程(高市)【榜眼】 普考 電子工程【探花】 地特四等(台中市)電力工程【狀元】 曾○富</p>	<p>狀元.榜眼.探花 普考 考電信工程【狀元】鐘○翊 地特四等(竹苗區)電子工程【狀元】詹○凱 地特四等(台中市)電力工程【狀元】柯○訓</p>	<p>地特三等(高雄市)電力工程【榜眼】江○展 普考 考電信工程【探花】王○鎧 地特三等(台北市)電力工程【探花】黃○任 地特五等(台北市)電子工程【探花】柯○輝</p>
---	--	---

110年度優秀考取

高考電力工程 廖○未 高考電力工程 徐○志 高考電力工程 江○展 高考電力工程 邱○輝 高考電力工程 徐○軒 高考電力工程 曾○倫 高考電力工程 陳○宥 高考電力工程 曾○翔 高考電力工程 李○賢	高考電子工程 林○玄 高考電子工程 張○揚 高考電子工程 李○憲 高考電子工程 游○璋 高考電子工程 何○勳 高考機械工程 鄭○威 高考機械工程 邱○清 高考機械工程 陳○好 高考機械工程 李○誠	普考機械工程 吳○揚 普考電力工程 吳○翰 普考電力工程 李○旌 普考電力工程 蔡○祐 普考電力工程 黃○堯 普考電力工程 席○榮 普考電力工程 曾○翔 普考電力工程 黃○任 普考電力工程 陳○文	普考電力工程 曾○倫 普考電力工程 賴○倫 普考電力工程 陳○祥 普考電力工程 江○展 普考電力工程 盧○源 普考電力工程 陳○昇 普考電力工程 曾○毅 普考電力工程 曾○豪 普考電力工程 詹○豪	普考電子工程 張○揚 普考電子工程 黃○皓 普考電子工程 李○齊 普考電子工程 高○辰 普考電子工程 詹○凱 普考電子工程 蔡○典 普考電子工程 林○玄 普考電子工程 王○延	普考機械工程 李○誠 普考機械工程 陳○好 普考機械工程 許○貴 普考機械工程 李○璇 初等電子工程 柯○輝 地特三等電力工程 張○培 地特四等電力工程 盧○源 地特四等電力工程 蘇○禎 因版面有限，無法一一刊登
--	--	--	--	--	--

乙、測驗題部分：(50 分)

(B) 1. 假設 A 與 B 為維度相同之方陣 (square matrix) 且 $A, B, A+B$ 均為可逆 (invertible) 矩陣，則下列何者不一定為可逆矩陣？

- (A) $A^T B$ (B) $I+A B$ (C) $I+A^{-1} B$ (D) $I+AB^{-1}$

(C) 2. 假設矩陣 $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ ， $B = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ ，則行列式值 $\det(2A^T B^{-1})$ 為何？

- (A) $\frac{12}{17}$ (B) $-\frac{12}{17}$ (C) $-\frac{48}{17}$ (D) $\frac{48}{17}$

(A) 3. 若 $P_{B \leftarrow B'} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 為從 R^3 的基底 B 轉換至基底 $B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ 之轉移矩陣

(transition matrix)，則 $B = ?$

- (A) $\{(3, 2, 2), (2, 1, 0), (4, 4, 1)\}$ (B) $\{(3, 4, 2), (2, 1, 2), (2, 0, 1)\}$
 (C) $\{(3, 1, 2), (1, 2, 1), (4, 1, 4)\}$ (D) $\{(3, 2, 1), (1, 2, 0), (2, 1, 0)\}$

(C) 4. 下列那一個矩陣無法被對角化 (diagonalizable)

(A) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(D) 5. 下列那一組 R^3 中之向量基於歐幾里得內積 (Euclidean inner product) 可作為規格化正交基底 (orthonormal basis) ?

(A) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

(D) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(D) 6. 設 T 是 R^3 到 R^2 的線性轉換, $T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, 下列

何者正確?

(A) $a-b=8$

(B) $a-b=10$

(C) $a+b=10$

(D) $a+b=8$

(B) 7. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \\ 6 & -2 & 4 & 14 \end{bmatrix}$ 的 LU 分解 (LU decomposition), 可化為 $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -2x \end{bmatrix}$

, $x = ?$

(A) $x=1$

(B) $x=2$

(C) $x=3$

(D) $x=4$

(C) 8. 設 α 和 β 為矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ 之特徵值 (eigenvalues), 則 $\alpha\beta + \alpha + \beta = ?$

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(A) 9. 定義 $i = \sqrt{-1}$, 若 $z = a + bi$ 為 $z^2 - (6 - 2i)z + 17 - 6i = 0$ 之一解, 且 $ab > 0$, 則 $a^2 + b^2 = ?$

(A) 13

(B) 15

(C) 18

(D) 20

(C) 10. 定義 $i = \sqrt{-1}$, 複變數 $z = x + iy$ 與其共軛複數 $\bar{z} = x - iy$ 。下列那一個複變函數為完整 (entire), 即在整個複數平面皆為可解析 (analytic) ?

(A) $f(z) = iz\bar{z}$

(B) $f(z) = x^2 + y^2 + i2xy$

(C) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \sin y)$

(D) $f(z) = \bar{z}$

(B) 11. 複變級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^n}$ 之收斂半徑 (radius of convergence) 為何? ($i = \sqrt{-1}$)

(A) 1

(B) ∞

(C) 0

(D) $\frac{1}{2}$

(B) 12. 計算 $\int_{\gamma} \bar{z} dz = ?$ 其中軌跡 $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$ 。 ($i = \sqrt{-1}$)

(A) $-\pi i$

(B) πi

(C) $-2\pi i$

(D) $2\pi i$

(C) 13. 一階常微分方程式 $e^{x+y}y' = 3x$, 下列何者為正確的解答? ($y' = \frac{dy}{dx}$)

(A) $e^{-y} = -3e^{-x}(x+1) + c$, 其中 c 為常數

(B) $e^y = -3e^x(x+2) + c$, 其中 c 為常數

(C) $e^y = -3e^{-x}(x+1) + c$, 其中 c 為常數

(D) $e^{-y} = -3e^{-x}(x+2) + c$, 其中 c 為常數

- (C) 14. 二階微分方程式 $x^2 y'' - 9xy' + 24y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 10$, 設 $y = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3$ 為其解, 下列何者正確? $\left(y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \right)$
- (A) $a=1$ (B) $b=-1$ (C) $c=-2$ (D) $d=-4$
- (A) 15. 反拉普拉斯轉換 (inverse Laplace transform)
- $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-3}{s^2+2s+2} + \frac{s}{s^2+2s+1} \right\} = e^{-t}(a \cos t + b \sin t + ct + d)$, a, b, c, d 為常數, 則:
- (A) $a+b+c+d=-3$ (B) $a+b+c+d=-4$ (C) $a+b+c+d=3$ (D) $a+b+c+d=4$
- (D) 16. 假設 $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s-1)^2} \right\}$, 其中 \mathcal{L}^{-1} 為反拉普拉斯轉換 (inverse Laplace transform), 下列何者正確?
- (A) $f(0) = -1$ (B) $f(0) = 1$ (C) $f(1) = -1$ (D) $f(1) = 1$
- (C) 17. 定義傅立葉轉換 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$, 令 $f(x) = \begin{cases} 5 & , -3 \leq x \leq 3 \\ 0 & , x < -3 \text{ 或 } x > 3 \end{cases}$, $F(\omega) = ?$ ($i = \sqrt{-1}$)
- (A) $\frac{6}{\omega} \sin(5\omega)$ (B) $\frac{6}{\omega} \cos(5\omega)$ (C) $\frac{10}{\omega} \sin(3\omega)$ (D) $\frac{10}{\omega} \sin(3\omega)$
- (C) 18. 若 X 為一連續均勻分布 (uniformly distributed) 在區間 $(0, 20)$ 之隨機變數, 可計算得知 $X < 10$ 之機率為 a , $X > 12$ 之機率為 b , $8 < X < 16$ 之機率為 c , 則 $a+b+c = ?$
- (A) $\frac{11}{10}$ (B) $\frac{6}{5}$ (C) $\frac{13}{10}$ (D) $\frac{7}{5}$
- (D) 19. 將一副正常的撲克牌 (52 張牌包含四種花色: 黑桃、方塊、紅心、梅花, 每種花色各 13 張牌, ACE 為各花色點數 1 的牌) 隨機均分為 4 疊, 每疊各 13 張牌。這四疊牌每疊恰好包含一張 ACE 牌的機率為何?
- (A) $\frac{1}{13}$ (B) $\frac{927}{2550}$ (C) $\frac{783}{2450}$ (D) $\frac{2197}{20825}$
- (A) 20. 設 X 和 Y 為連續隨機變數, 其聯合機率密度函數 (joint probability density function)
- $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & , 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$, 令 $W=Y/X$, 期望值 $E(W) = ?$
- (A) $1/2$ (B) 1 (C) $3/2$ (D) 2

志光 保成 學儒

112年 虛實整合

多元學習新型態

重聽OK 旁聽OK

突破傳統上課形式 **5大方式** 彈性又便利

| 面授學習 | 直播學習 | 在家學習 | 視訊學習 | Wifi學習 |

✦ 學習 ✦

零時差

同類科各班別
皆可同步直播上課

✦ 服務 ✦

零死角

服務緊貼需求
隨時掌握學習狀況

線上
課業諮詢



老師
申論批閱



雙師資
雙循環



多元
補課方式



上榜生
經驗親授



時事
專題講座



歷屆試題
練習



班導師
制度



各班服務略有不同, 詳情請洽全國志光、保成、學儒門市