

# 111 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

吳迪老師解題

甲、申論題部分：(50 分)

一、我們考慮空間中的三個向量： $\vec{a} = (-3, -2, 1)$ 、 $\vec{b} = (2, 4, -5)$ 、 $\vec{c} = (-1, -1, 3)$  (每小題 6 分，共 12 分)

(一)請計算  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  所圍出的平行四邊形的面積。

(二)請計算  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  所圍出的平行六面體的體積。

1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：考向量的應用, 基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P9-8~P9-9

【擬答】：

(一)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left( \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (6, -13, -8)$$

$\vec{a}, \vec{b}$  所圍平行四邊形的面積

$$= |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-13)^2 + (-8)^2} = \sqrt{269}$$

$$(二) V = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 17$$

二、考慮如下所示之初始值問題 (initial-value problem)： $\left( y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \right)$

$$\begin{cases} \text{微分方程式：} y'' + 3y' + 2y = x \\ \text{初始條件：} y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

(每小題 7 分，共 14 分)

(一)請求出本題目中之微分方程式的齊次解 (homogeneous solution)，該齊次解應為一般形式 (general form) 解。

(二)請求出本初始值問題的精確解 (exact solution)。

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考二階常微分方程的齊次解及特解
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P2-7~P2-18

【擬答】：

$$(一) y'' + 3y' + 2y = 0$$

令  $y = e^{\lambda x}$  代入得特徵方程式

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1, -2$$

$$\therefore y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$(\text{二}) \text{ 令 } D = \frac{d}{dx}, D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\Rightarrow (D^2 + 3D + 2)y = x$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2 + 3D + 2} x$$

$$= \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4}D + \dots \right) x$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

$$\therefore y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

$$y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 - \frac{3}{4} = 0 \\ y'(0) = 0 \Rightarrow -c_1 - 2c_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore y = e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

三、我們準備從一疊標準的撲克牌[共 52 張牌，沒有鬼牌(Joker)]裡面來隨機抽牌。(每小題 6 分，共 12 分)

(一)假設我們的抽牌方式是：抽牌看了結果以後會把牌再放回原來那疊撲克牌裡面；在這種情況之下，我們會剛好第 6 次抽牌的時候首度抽到王牌 (ACE) 的機率為何？

(二)假設我們的抽牌方式是：抽牌看了結果以後不會把牌放回原來那疊撲克牌裡面 (也就是會把牌往旁邊擺)；在這種情況之下，我們會剛好第 6 次抽牌的時候首度抽到王牌 (ACE) 的機率為何？

1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：考古典機率, 基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P7-3~P7-6

【擬答】：

$$(\text{一}) p = \left(\frac{12}{13}\right)^5 \left(\frac{1}{13}\right) = 0.0516$$

$$(\text{二}) p = \left(\frac{48}{52}\right) \left(\frac{47}{51}\right) \left(\frac{46}{50}\right) \left(\frac{45}{49}\right) \left(\frac{44}{48}\right) \left(\frac{4}{47}\right) = 0.0516$$

四、在本題目中，我們考慮複變函數 (complex-valued function) 沿著曲線 (contour) 做積分 (integral) 的問題。我們用  $\Gamma$  代表在複數平面上的單位圓 (也就是以座標系的原點為圓心而且半徑為 1 的圓) 之中從  $1+i \cdot 0 (i = \sqrt{-1})$  以逆時針方向繞一圈走回到原出發點的曲線。請計算下列兩個積分的結果。(每小題 6 分，共 12 分)

(一)  $\int_{\Gamma} z dz = ?$

(二)  $\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = ?$

1. 《考題難易》：★★★  
 2. 《解題關鍵》：考複積分, 基本題  
 3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P10-18~P10-25

【擬答】：

(一) 令  $f(z)=z$ ，且  $f(z)$  在  $\Gamma$  內解析

$\Rightarrow \int_{\Gamma} z dz = 0$

(二) 令  $f(z) = \frac{1}{z}$ ，且  $z=0$  在  $c$  內為奇異點  $\Rightarrow \text{Res}\{f(z)\}_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} z \times \frac{1}{z} = 1$

$\Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \times 1 = 2\pi i$



**志光學需保成**  
**跟著工科學長姐們 戰上榜**

**我們都是前三名**

<p><b>連過三榜</b>                  普考 電子工程【狀元】                  地特四等電子工程(高市)【榜眼】                  曾○富                  普考 電子工程【探花】</p>	<p><b>狀元.榜眼.探花</b>                  普考 考電信工程【狀元】鐘○翊                  地特四等(竹苗區)電子工程【狀元】詹○凱                  地特四等(台中市)電力工程【狀元】柯○訓</p>	<p>地特三等(高雄市)電力工程【榜眼】江○展                  普考 考電信工程【探花】王○鎧                  地特三等(台北市)電力工程【探花】黃○任                  地特五等(台北市)電子工程【探花】柯○輝</p>
---	---	--

**110年度優秀考取**

高考電力工程 廖○未 高考電力工程 徐○志 高考電力工程 江○展 高考電力工程 邱○輝 高考電力工程 徐○軒 高考電力工程 曾○倫 高考電力工程 陳○翊 高考電力工程 曾○翔 高考電力工程 李○賢	高考電子工程 林○玄 高考電子工程 張○揚 高考電子工程 李○憲 高考電子工程 游○璋 高考電子工程 何○勳 高考機械工程 鄭○威 高考機械工程 邱○清 高考機械工程 陳○好 高考機械工程 李○誠	普考機械工程 吳○揚 普考電力工程 吳○翰 普考電力工程 李○旌 普考電力工程 蔡○祐 普考電力工程 黃○堯 普考電力工程 席○榮 普考電力工程 曾○翔 普考電力工程 黃○任 普考電力工程 陳○文	普考電力工程 曾○倫 普考電力工程 賴○倫 普考電力工程 陳○祥 普考電力工程 江○展 普考電力工程 盧○源 普考電力工程 陳○昇 普考電力工程 曾○毅 普考電力工程 曾○豪 普考電力工程 詹○豪	普考電子工程 張○揚 普考電子工程 黃○皓 普考電子工程 李○齊 普考電子工程 高○辰 普考電子工程 詹○凱 普考電子工程 蔡○典 普考電子工程 林○玄 普考電子工程 王○延	普考機械工程 李○誠 普考機械工程 陳○好 普考機械工程 許○貴 普考機械工程 李○璇 初等電子工程 柯○輝 地特三等電力工程 張○培 地特四等電力工程 盧○源 地特四等電力工程 蘇○禎 因版面有限，無法一一刊登
--	--	--	--	--	--

乙、測驗題部分：(50 分)

(B) 1. 假設  $A$  與  $B$  為維度相同之方陣 (square matrix) 且  $A, B, A+B$  均為可逆 (invertible) 矩陣，則下列何者不一定為可逆矩陣？

- (A)  $A^T B$                       (B)  $I+A B$                       (C)  $I+A^{-1} B$                       (D)  $I+AB^{-1}$

(C) 2. 假設矩陣  $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ ， $B = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ ，則行列式值  $\det(2A^T B^{-1})$  為何？

- (A)  $\frac{12}{17}$                       (B)  $-\frac{12}{17}$                       (C)  $-\frac{48}{17}$                       (D)  $\frac{48}{17}$

(A) 3. 若  $P_{B \leftarrow B'} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$  為從  $R^3$  的基底  $B$  轉換至基底  $B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$  之轉移矩陣

(transition matrix)，則  $B = ?$

- (A)  $\{(3, 2, 2), (2, 1, 0), (4, 4, 1)\}$                       (B)  $\{(3, 4, 2), (2, 1, 2), (2, 0, 1)\}$   
 (C)  $\{(3, 1, 2), (1, 2, 1), (4, 1, 4)\}$                       (D)  $\{(3, 2, 1), (1, 2, 0), (2, 1, 0)\}$

(C) 4. 下列那一個矩陣無法被對角化 (diagonalizable)

(A)  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$       (B)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$       (C)  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$       (D)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(D) 5. 下列那一組  $R^3$  中之向量基於歐幾里得內積 (Euclidean inner product) 可作為規格化正交基底 (orthonormal basis) ?

(A)  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(B)  $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

(C)  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

(D)  $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(D) 6. 設  $T$  是  $R^3$  到  $R^2$  的線性轉換,  $T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $T\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , 下列

何者正確?

(A)  $a-b=8$

(B)  $a-b=10$

(C)  $a+b=10$

(D)  $a+b=8$

(B) 7. 矩陣  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \\ 6 & -2 & 4 & 14 \end{bmatrix}$  的 LU 分解 (LU decomposition), 可化為  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -2x \end{bmatrix}$

,  $x = ?$

(A)  $x=1$

(B)  $x=2$

(C)  $x=3$

(D)  $x=4$

(C) 8. 設  $\alpha$  和  $\beta$  為矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  之特徵值 (eigenvalues), 則  $\alpha\beta + \alpha + \beta = ?$

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(A) 9. 定義  $i = \sqrt{-1}$ , 若  $z = a + bi$  為  $z^2 - (6 - 2i)z + 17 - 6i = 0$  之一解, 且  $ab > 0$ , 則  $a^2 + b^2 = ?$

(A) 13

(B) 15

(C) 18

(D) 20

(C) 10. 定義  $i = \sqrt{-1}$ , 複變數  $z = x + iy$  與其共軛複數  $\bar{z} = x - iy$ 。下列那一個複變函數為完整 (entire), 即在整個複數平面皆為可解析 (analytic) ?

(A)  $f(z) = iz\bar{z}$

(B)  $f(z) = x^2 + y^2 + i2xy$

(C)  $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \sin y)$

(D)  $f(z) = \bar{z}$

(B) 11. 複變級數  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^n}$  之收斂半徑 (radius of convergence) 為何? ( $i = \sqrt{-1}$ )

(A) 1

(B)  $\infty$

(C) 0

(D)  $\frac{1}{2}$

(B) 12. 計算  $\int_{\gamma} \bar{z} dz = ?$  其中軌跡  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ 。 ( $i = \sqrt{-1}$ )

(A)  $-\pi i$

(B)  $\pi i$

(C)  $-2\pi i$

(D)  $2\pi i$

(C) 13. 一階常微分方程式  $e^{x+y}y' = 3x$ , 下列何者為正確的解答? ( $y' = \frac{dy}{dx}$ )

(A)  $e^{-y} = -3e^{-x}(x+1) + c$ , 其中  $c$  為常數

(B)  $e^y = -3e^x(x+2) + c$ , 其中  $c$  為常數

(C)  $e^y = -3e^{-x}(x+1) + c$ , 其中  $c$  為常數

(D)  $e^{-y} = -3e^{-x}(x+2) + c$ , 其中  $c$  為常數

- (C) 14. 二階微分方程式  $x^2 y'' - 9xy' + 24y = 0$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 10$ , 設  $y = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3$  為其解, 下列何者正確?  $\left( y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \right)$
- (A)  $a=1$  (B)  $b=-1$  (C)  $c=-2$  (D)  $d=-4$
- (A) 15. 反拉普拉斯轉換 (inverse Laplace transform)
- $$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-3}{s^2+2s+2} + \frac{s}{s^2+2s+1} \right\} = e^{-t}(a \cos t + b \sin t + ct + d)$$
- ,
- $a, b, c, d$
- 為常數, 則:
- (A)  $a+b+c+d=-3$  (B)  $a+b+c+d=-4$  (C)  $a+b+c+d=3$  (D)  $a+b+c+d=4$
- (D) 16. 假設  $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s-1)^2} \right\}$ , 其中  $\mathcal{L}^{-1}$  為反拉普拉斯轉換 (inverse Laplace transform), 下列何者正確?
- (A)  $f(0) = -1$  (B)  $f(0) = 1$  (C)  $f(1) = -1$  (D)  $f(1) = 1$
- (C) 17. 定義傅立葉轉換  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$ , 令  $f(x) = \begin{cases} 5, & -3 \leq x \leq 3 \\ 0, & x < -3 \text{ 或 } x > 3 \end{cases}$ ,  $F(\omega) = ?$  ( $i = \sqrt{-1}$ )
- (A)  $\frac{6}{\omega} \sin(5\omega)$  (B)  $\frac{6}{\omega} \cos(5\omega)$  (C)  $\frac{10}{\omega} \sin(3\omega)$  (D)  $\frac{10}{\omega} \sin(3\omega)$
- (C) 18. 若  $X$  為一連續均勻分布 (uniformly distributed) 在區間  $(0, 20)$  之隨機變數, 可計算得知  $X < 10$  之機率為  $a$ ,  $X > 12$  之機率為  $b$ ,  $8 < X < 16$  之機率為  $c$ , 則  $a+b+c = ?$
- (A)  $\frac{11}{10}$  (B)  $\frac{6}{5}$  (C)  $\frac{13}{10}$  (D)  $\frac{7}{5}$
- (D) 19. 將一副正常的撲克牌 (52 張牌包含四種花色: 黑桃、方塊、紅心、梅花, 每種花色各 13 張牌, ACE 為各花色點數 1 的牌) 隨機均分為 4 疊, 每疊各 13 張牌。這四疊牌每疊恰好包含一張 ACE 牌的機率為何?
- (A)  $\frac{1}{13}$  (B)  $\frac{927}{2550}$  (C)  $\frac{783}{2450}$  (D)  $\frac{2197}{20825}$
- (A) 20. 設  $X$  和  $Y$  為連續隨機變數, 其聯合機率密度函數 (joint probability density function)
- $$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$
- , 令
- $W=Y/X$
- , 期望值
- $E(W) = ?$
- (A)  $1/2$  (B)  $1$  (C)  $3/2$  (D)  $2$

志光 保成 學儒

112年 虛實整合

# 多元學習新形態

重聽OK 旁聽OK

**突破傳統上課形式 5大方式彈性又便利**

| 面授學習 | 直播學習 | 在家學習 | 視訊學習 | Wifi學習 |

<p>✦學習✦ 零時差</p>	<p>同類科各班別 皆可同步直播上課</p>	<p>✦服務✦ 零死角</p>	<p>服務緊貼需求 隨時掌握學習狀況</p>
<p>線上 課業諮詢</p>	<p>老師 申論批閱</p>	<p>雙師資 雙循環</p>	<p>多元 補課方式</p>
<p>上榜生 經驗親授</p>	<p>時事 專題講座</p>	<p>歷屆試題 練習</p>	<p>班導師 制度</p>

各班服務略有不同, 詳情請洽全國志光、保成、學儒門市