

111 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：機械工程

科 目：自動控制

陳銘老師

一、對於一轉移函數， $\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{3}{(s^2 + 1)(s + 3)}$ ：

(一)當輸入 $r(t)$ 為單位脈衝函數，試推導其輸出 $c(t)$ 之時間函數，並說明該輸出為何會振個不停。(10 分)

(二)當輸入為 $r(t) = \delta(t) + t$ ，試推導其輸出 $c(t)$ 之時間函數，並說明該輸出為何會不振。(15 分)

1. 《考題難易》★★：簡單

2. 《破題關鍵》：熟悉拉氏轉換即可求出

【擬答】

(一)化成部分分式為

$$\frac{3}{(s+3)(s^2+1)} = \frac{0.3}{s+3} + \frac{-0.3s+0.9}{s^2+1}$$

當輸入 $r(t)$ 為單位脈衝函數， $R(s)=1$ ，故

$$c(t) = 0.3e^{-3t} - 0.3\cos t + 0.9\sin t$$

成份中在 $t \rightarrow \infty$ 後為 $\sin$ 與 $\cos$ 的組合，因此振個不停

(二)輸入為 $r(t) = \delta(t) + t$ ，化成拉氏轉換為

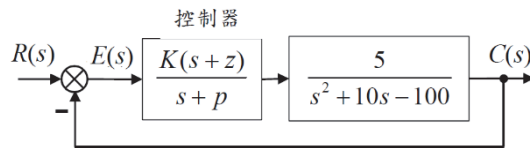
$$r(t) = \delta(t) + t \Rightarrow R(s) = 1 + \frac{1}{s^2} = \frac{s^2 + 1}{s^2}$$

$$C(s) = \frac{3}{(s+3)(s^2+1)} \times \frac{s^2+1}{s^2} = \frac{3}{s^2(s+3)} = \frac{\frac{1}{3}}{s+3} + \frac{-\frac{1}{3}}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$c(t) = \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{3} + t$$

沒有 $\sin$ 與 $\cos$ 形式，所以不振

二、對於如一單位負回授系統，輸入為單位步階函數 (unit step function)：



(一)於 $p=z$ 時，穩定條件為何？自然振頻 (natural frequency) ω_n 為多少赫茲 (Hz)？阻尼比 (damping ratio) ξ 為何？其 2% 安定時間 (settling time) $t_s = \frac{4.5}{\xi\omega_n}$ 為多少秒？(10 分)

(二)於 $z=1$ 且 $p=2$ 時，該系統之穩定條件為何？(10 分)

(三)於 $z=1$ 且 $p=2$ 時，該控制器之名稱為何？其穩態誤差 $e_{ss}(t)$ 為何？(5 分)

1. 《考題難易》★★：簡單

2. 《破題關鍵》：需知道單位回授控制的時域分析

【擬答】

(一)若 $p=z$ 時，則閉迴路轉移函數為

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \times \frac{5}{s^2 + 10s - 100}}{1 + \frac{5K}{s^2 + 10s - 100}} = \frac{5K}{s^2 + 10s + (5K - 100)}$$

$$\omega_n^2 = 5K - 100 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{5K - 100} \Rightarrow f_n = \frac{\sqrt{5K - 100}}{2\pi}$$

$$\xi\omega_n = 5 \Rightarrow \xi = \frac{5}{\sqrt{5K - 100}}$$

2% 安定時間 (settling time) 為

$$t_s = \frac{4.5}{5} = 0.9s$$

(二)閉迴路轉移函數為

$$\begin{aligned} \frac{s+1}{s+2} \times \frac{5K}{s^2 + 10s - 10} &= \frac{5K(s+1)}{(s+2)(s^2 + 10s - 10) + 5K(s+1)} \\ 1 + \frac{s+1}{s+2} \times \frac{5K}{s^2 + 10s - 10} &= \frac{5K(s+1)}{s^3 + 12s^2 + (5K+10)s + (5K-20)} \end{aligned}$$

Routh-Hurwitz 表如下

s^3	1	$5K+10$
s^2	12	$5K-20$
s^1	$\frac{55K+140}{12}$	0
s^0	$5K-20$	

若需閉迴路穩定，則

$$55K+140 > 0 \Rightarrow K > -\frac{28}{11}; 5K-20 > 0 \Rightarrow K > 4$$

(三)為型式 0 的控制系統，穩態誤差 $e_{ss}(t)$ 為

$$e_{ss}(\text{step}) = \frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{1+\lim_{s \rightarrow 0} \frac{5k}{s^2+10s-10} \times \frac{s+1}{s+2}} = \frac{4}{4-k}$$

公職

志光 學儒 保成

我變強的祕密

工科題庫班

解析 題目觀念

精選易錯題型
加強觀念解析

強化 解題技巧

以題目授課
加強應考實力

增快 答題速度

加強快速審題
增加取分機會

題庫班老師 會將考試內容做統整，並講解解題需注意的點，讓學生在考場上遇到相似題型，不會不知如何著手以及解省時間。

110年高考&鐵路高員電子工程 李O憲 **考取2種考試**



三、對於一個單位負回授系統 (negative unity feedback system)，其開迴路轉移函數 (open-loop transfer function) 為 $KG(s)$ ，且 $G(s) = \frac{s^2 + s}{s^2 + 7s + 12}$ ，對於其閉迴路極點根軌跡 (root-locus) 之

分離／重合點 (breakaway/break-in points) 的求解方程式為 $\frac{d}{ds}G(s) = 0$ ：

(一) 試證明該求解方程式為正確。(10 分)

(二) 試求該開迴路轉移函數之極零點。(5 分)

(三) 試繪製該閉迴路極點根軌跡圖。(5 分)

(四) 試求該閉迴路極點根軌跡圖之分離／重合點位置。(5 分)

1. 《考題難易》★★★：普通

2. 《破題關鍵》：瞭解根軌跡圖的原理與畫法

【擬答】

$$KG(s) = K \times \frac{s(s+1)}{(s+3)(s+4)}$$

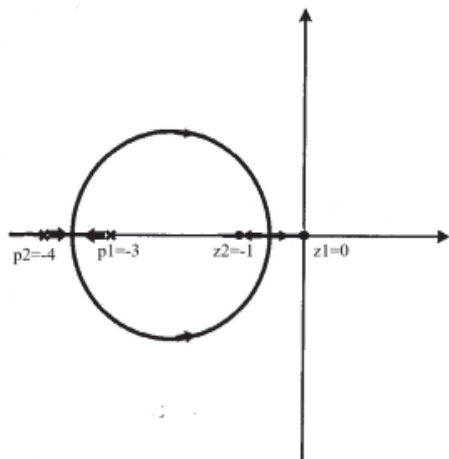
(一) 根軌跡 (root-locus) 之分離／重合點 (breakaway/break-in points) 求法如下

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + KG(s) = 0 \Rightarrow K = -\frac{1}{G(s)}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} \left[-\frac{1}{G(s)} \right] = -\frac{\frac{dG(s)}{ds}}{G^2(s)} = 0 \Rightarrow \frac{dG(s)}{ds} = 0$$

(二) 極點為 -3, -4；零點為 0, -1

(三) 閉迴路極點根軌跡圖為



(四) 求解方程式為 $\frac{d}{ds}G(s) = 0$ ，則

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{s(s+1)}{(s+3)(s+4)} \right] = 0 \Rightarrow \frac{(s^2 + 7s + 12)(2s + 1) - (s^2 + s)(2s + 7)}{(s+3)^2(s+4)^2} = 0$$

$$\text{所以 } 6s^2 + 24s + 12 = 0 \Rightarrow s^2 + 4s + 2 = 0 \Rightarrow s = -3.414; -0.586$$

四、一個機械系統，經由拉式轉換 (Laplace transform) 後：

(每小題 5 分，共 25 分)

(一)對一質量 M 施力 $F(s)$ 時，試繪製該施力 $F(s)$ 與質量速度 $V(s)$ 間之方塊圖。

(二)一總合施力 $R(s)$ 減去阻尼摩擦力 $D(s)=cV(s)$ 等於對質量的施力 $F(s)$ ， c 為阻尼常數，試繪製該總合施力 $R(s)$ 與質量速度 $V(s)$ 間之方塊圖。

(三)試繪製如前述質量速度 $V(s)$ 與該質量的位移 $X(s)$ 間之方塊圖。

(四)試繪製以輸入電壓 $U(s)$ 之 k 倍比例得到總合施力 $R(s)$ 輸出的方塊圖。

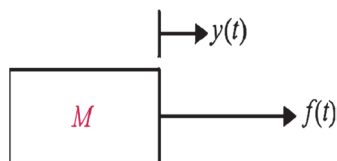
(五)輸入位移命令 $Y(s)$ 與該質量位移 $X(s)$ 的差異得到前述電壓 $U(s)$ ，試繪製一完整由輸入位移命令 $Y(s)$ 至該質量位移 $X(s)$ 之系統方塊圖。

1. 《考題難易》★★★：普通

2. 《破題關鍵》：建構位移機械系統方塊圖

【擬答】

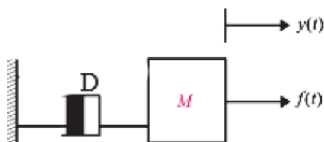
(一)方塊圖如下



$$f(t) = Ma = M \frac{d^2 y}{dt^2} = M \frac{dv}{dt}$$

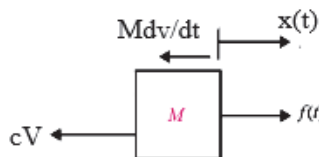
$$F(s) = MsV$$

(二)方塊圖如下



$$F(s) = R(s) - cV(s) = MsV$$

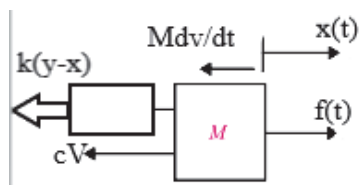
(三)方塊圖如下



(四)方塊圖如下



(五)方塊圖如下



公職王

志光
保成
學儒

112年 虛實整合

重聽OK
旁聽OK

多元學習新型態

突破傳統上課形式 **5大方式彈性又便利**
| 面授學習 | 直播學習 | 在家學習 | 視訊學習 | Wifi學習 |

✦學習✦ 零時差	同類科各班別 皆可同步直播上課	✦服務✦ 零死角	服務緊貼需求 隨時掌握學習狀況				
	線上 課業諮詢		老師 申論批閱		雙師資 雙循環		多元 補課方式
	上榜生 經驗親授		時事 專題講座		歷屆試題 練習		班導師 制度

各班服務略有不同，詳情請洽全國志光、保成、學儒門市