

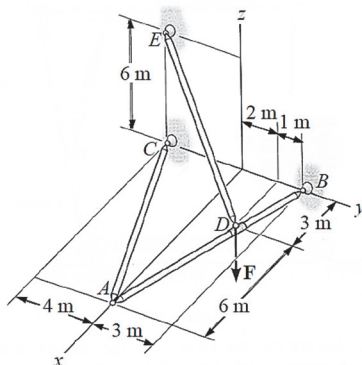
111 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：機械工程

科 目：工程力學（包括靜力學、動力學與材料力學）

簡立強/力升老師

- 一、如圖所示由三根桿件所構成之空間桁架，桿件端點都是球窩接頭（ball-and-socket joints），在 D 點之作用力 $F = (135i + 200j - 180k)$ kN。試求在 ED 桿件之反力大小及說明其為張力或壓力。（20 分）



1. 《考題難易》：★★簡單

2. 《破題關鍵》：

*三維空間桁架以向量表示各桿內力及位置向量計算。

*依圖形中 AB 桿在 D 點不是鉸接所以不是二力桿。

【擬答】

A(9,0,0), B(0,3,0), C(0,-4,0), D(3,2,0), E(0,-4,6)

以 AB 桿件的自由體求解 DE 及 AC 桿件內力

設 T_{DE} 及 T_{AC} 為張力

$$\vec{r}_{BA} = (9\vec{i} - 3\vec{j})$$

$$\vec{r}_{BD} = (3\vec{i} - 1\vec{j})$$

$$|AC| = \sqrt{9^2 + 4^2} = \sqrt{97}m$$

$$\vec{\lambda}_{AC} = \frac{1}{\sqrt{97}}(-9\vec{i} - 4\vec{j})$$

$$|DE| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = 9m$$

$$\vec{\lambda}_{DE} = \frac{1}{9}(-3\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k})$$

$$\vec{T}_{AC} = \frac{T_{AC}}{\sqrt{97}}(-9\vec{i} - 4\vec{j})$$

$$\vec{T}_{DE} = \frac{T_{DE}}{9}(-3\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k})$$

$$\vec{F} = 135\vec{i} + 200\vec{j} - 180\vec{k}$$

由 AB 桿件的自由體，B 點合力矩為零

$$\sum \vec{M}_B = 0 \Rightarrow \vec{r}_{BA} \times \vec{T}_{AC} + \vec{r}_{BD} \times (\vec{T}_{DE} + \vec{F}) = 0$$

$$(9\vec{i} - 3\vec{j}) \times \frac{T_{AC}}{\sqrt{97}}(-9\vec{i} - 4\vec{j}) + (3\vec{i} - 1\vec{j}) \times \left(\frac{T_{DE}}{9}(-3\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}) + 135\vec{i} + 200\vec{j} - 180\vec{k} \right) = 0$$

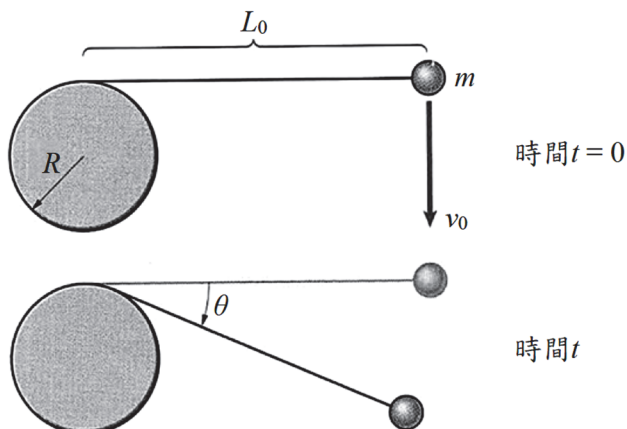
$$\left(-\frac{2T_{DE}}{3} + 180 \right) \vec{i} + (540 - 2T_{DE}) \vec{j} + \left(-\frac{63T_{AC}}{\sqrt{97}} - \frac{7}{3}T_{DE} + 735 \right) \vec{k} = 0$$

$$-\frac{2T_{DE}}{3} + 180 = 0 \Rightarrow T_{DE} = 270kN(\text{張力})$$

答：ED 桿件之反力為張力 270Kn

公職王歷屆試題 (111 高考三級)

二、如圖所示，有一繩索末端繫有一質量 m 之質點，另一端則繞在一半徑為 R 之圓柱上。在時間 $t=0$ 時，質點之初始速度為 v_0 ，且繩索繃緊之初始長度為 L_0 。若繩索與質點都假設於水平面上，且除繩索之張力 T 外，並無其他外力作用，試求繩索張力 T 隨角度 θ 之改變關係函數式。(20 分)

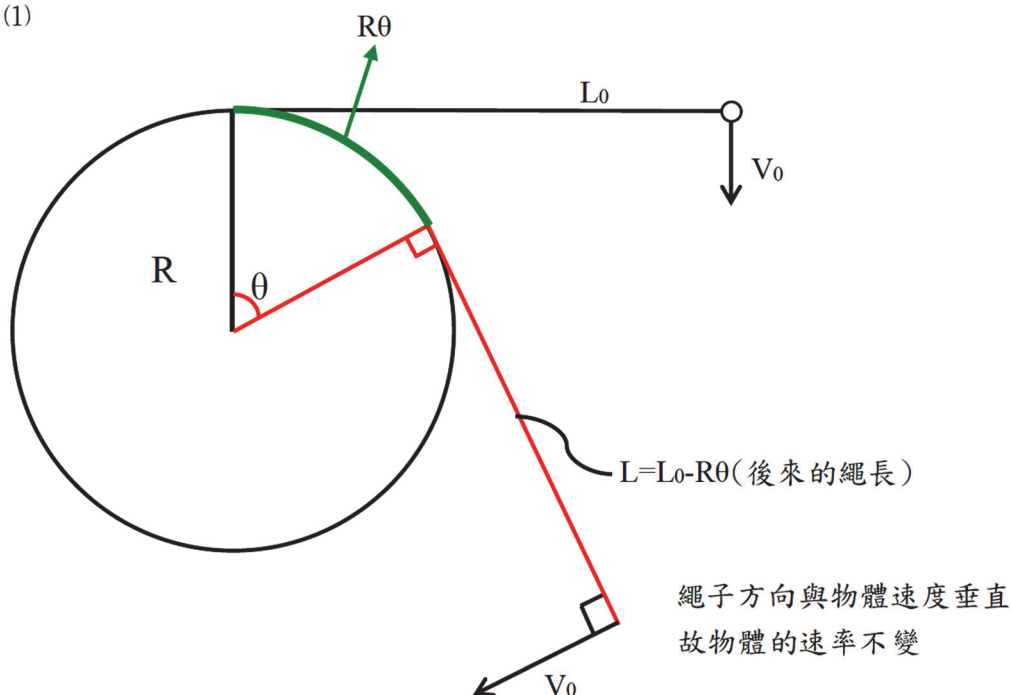


1.《考題難易》：★★★★普通

2.《破題關鍵》：轉動和微積分處理

【擬答】

(1)



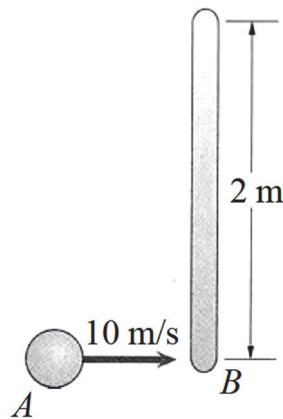
$$(2) t = \frac{s}{v_0} = \frac{\theta(L_0 - \frac{1}{2}R\theta)}{v_0} \quad \left[ds = (L_0 - R\theta)d\theta \Rightarrow s = \theta(L_0 - \frac{1}{2}R\theta) \right]$$

$$\theta = \frac{L_0 \pm \sqrt{L_0^2 - 2R_t V_0}}{R} \quad \text{又 } \theta \leq \frac{L_0}{R}$$

$$\text{故 } \theta = \frac{L_0 - \sqrt{L_0^2 - 2R_t V_0}}{R} \Rightarrow L = L_0 - R\theta = \sqrt{L_0^2 - 2RV_0 t}$$

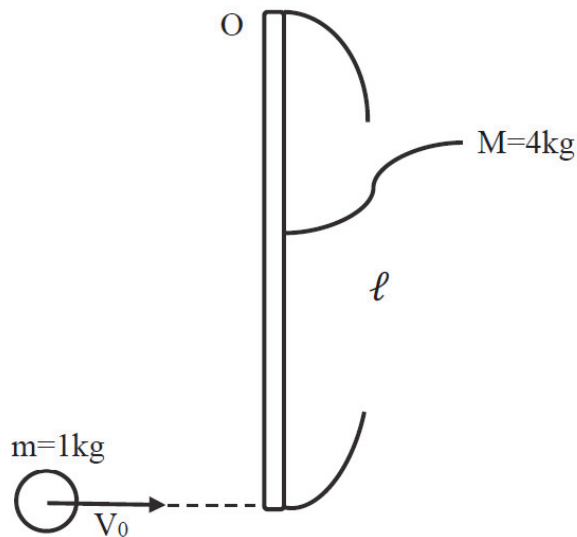
$$\begin{aligned} \text{故張力 } T &= m \frac{v_0^2}{L} = m \frac{v_0^2}{\sqrt{L_0^2 - 2RV_0t}} \\ &= m \frac{V_0^2}{\sqrt{L_0^2 - 2RV_0t \frac{\theta(L_0 - \frac{1}{2}R\theta)}{V_0}}} = m \frac{V_0^2}{\sqrt{L_0^2 - 2R\theta(L_0 - \frac{1}{2}R\theta)}} \end{aligned}$$

三、如圖所示，有一 1kg 質量之圓球 A 在水平面上以 10m/s 之速度撞擊一 2m 長、4kg 質量之靜止桿件 B。若撞擊後球黏著於桿件上（即恢復係數為 0），試求撞擊後桿件之角速度。(20 分)



1. 《考題難易》：★★★★普通
2. 《破題關鍵》：角動量守恆

【擬答】

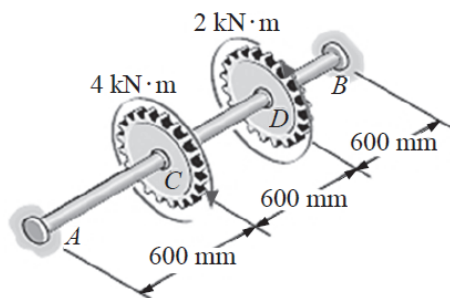


由角動量守恆 (for O 點)

$$\ell m V_0 + 0 = \left(\frac{1}{3} M \ell^2 + m \ell^2 \right) \cdot W$$

$$\therefore W = \frac{\ell m V_0}{\frac{1}{3} M \ell^2 + m \ell^2} = \frac{2 \times 1 \times 10}{\frac{28}{3}} = \frac{60}{28} = \frac{15}{7} \text{ (rad/s)}$$

四、如圖所示之鋼軸 ($G=75\text{GPa}$) 由直徑為 80mm 實心圓桿所組成，軸 B 端為完全固定，而 A 端有 0.005rad 之餘隙，即可自由轉動 0.005rad 後就固定。軸上 C 、 D 處分別承受圖中所示之外力扭矩，且於 D 點處承受 $750\text{N}\cdot\text{m}$ 之外加扭矩，試求軸內之最大扭轉剪應力。(20 分)



1. 《考題難易》：★★★★困難

2. 《破題關鍵》

*題意中，於 D 點處承受 $750\text{N}\cdot\text{m}$ 之外加扭矩，未說明如何加載無從分析起，故選擇忽略此條件。

* A 點的轉角在接觸前為 0.005rad ，若視 A 為自由端時外加载重產生 A 的轉角應會大於 0.005rad ，但在接觸後為固定不再扭轉，多餘的轉角會內化為桿件內力及 A 、 B 反力。

【擬答】

題意中“且於 D 點處承受 $750\text{N}\cdot\text{m}$ 之外加扭矩”不明白其是如何加載，解題時忽略此條件。

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi 80^4}{32} = 4021239\text{mm}^4$$

$$L = 600\text{mm}$$

桿件若視 A 點為自由端時， A 的扭轉角為 ϕ_0

$$T_{CD} = 4\text{kN}\cdot\text{m}, T_{BD} = 2\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\phi_0 = \frac{(T_{CD} + T_{BD})L}{GJ} = \frac{6 \times 10^6 \times 600}{75 \times 10^3 \times 4021239} = 0.012\text{rad}$$

桿件接觸 A 點後 A 點為固定端所以 A 的扭轉角為零。桿件未接觸前 A 點已經轉 0.005rad 所以 A 點有 $\phi_1 = \phi_0 - 0.005 = 0.012 - 0.005 = 0.007\text{rad}$ 的轉角， ϕ_1 將轉為桿件的內力及反力

設 B 點反力為 $R(\rightarrow)$

$$T_{BD} = R$$

$$T_{CD} = R - 2$$

$$T_{AC} = R + 2$$

$$\phi_1 = \frac{(R + R - 2 + R + 2)L}{GJ} = 0.007 \Rightarrow R = \frac{0.007GJ}{3L} = \frac{0.007 \times 75 \times 10^3 \times 4021239}{3 \times 600} \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow R = 1.173\text{kN}\cdot\text{m}$$

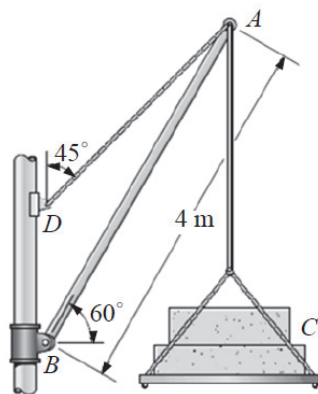
最大桿件內力為 $T_{AC} = R + 2 = 1.173 + 2 = 3.173\text{kN}\cdot\text{m}$

最大扭轉剪應力 τ_{max}

$$\tau_{max} = \frac{T_{AC}r}{J} = \frac{3.173 \times 10^6 \times 40}{4021239} = 31.56\text{MPa}$$

答：最大扭轉剪應力為 31.56MPa

五、如圖吊架吊掛重物 C 質量為 500 kg，其中桿件 AB 為鋼製 ($E = 207 \text{ GPa}$) 之實心圓截面，且設計時針對預防挫曲 (buckling) 失效的安全係數為 2.0，試求此桿件設計時所需之直徑。(20 分)



1. 《考題難易》：★★簡單

2. 《破題關鍵》：

*AD 為繩索內力為拉力，AB 桿為二力桿，由 A 點的平衡方程式可求出 AB 桿內力。

*AB 桿兩端為鉸接所以其有效長度係數 $K=1.0$

【擬答】

設 AD 桿及 AB 桿的內力分別為 T_{AD} 及 T_{AB} 。

取 A 點為自由端時

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AD} \cos 45^\circ + T_{AB} \sin 30^\circ = 0 \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AD} \sin 45^\circ + T_{AB} \cos 30^\circ + 500 \times 9.81 = 0 \dots (2)$$

由(1)(2)式得

$$T_{AB} = -24121.3 \text{ N}$$

AB 桿兩端為鉸接所以其有效長度係數 $K=1.0$

AB 桿為壓力桿件其臨界載重為 P_{cr} 大於等於 $(T_{AB} \times F.S.)$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 \times 207 \times 10^3 I}{(400)^2} \geq T_{AB} \times F.S. = 24121.3 \times 2 = 48242.6 \text{ N}$$

$$\Rightarrow I \geq 3778.2 \text{ mm}^4$$

所需直徑為 d

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{3778.2 \times 64}{\pi}} = 16.7 \text{ mm}$$

答：所需直徑 $d \geq 16.7 \text{ mm}$

112年 虛實整合

多元學習新型態

突破傳統上課形式 **5大方式** 彈性又便利

| 面授學習 | 直播學習 | 在家學習 | 視訊學習 | Wifi學習 |

◆學習◆ 零時差 同類科各班別 皆可同步直播上課	◆服務◆ 零死角 服務緊貼需求 隨時掌握學習狀況
線上 課業諮詢 老師 申論批閱 雙師資 雙循環 多元 補課方式	上榜生 經驗親授 時事 專題講座 歷屆試題 練習 班導師 制度

各班服務略有不同，詳情請洽全國志光、保成、學儒門市