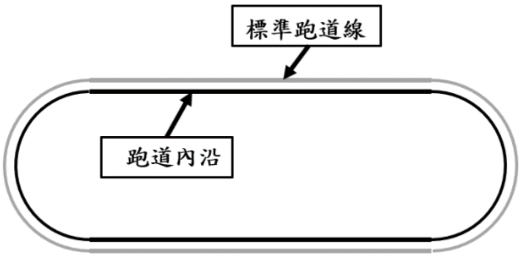
111 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　別：四等考試
類　科：土木工程
科　目：測量學概要

一、某田徑場的 400m 競賽跑道是由兩個半圓加上兩個直線段組成的長圓形(如下圖)，為檢驗此競賽跑道是否符合標準進行觀測，量測跑道內沿的直線段長度得 L = 84.392m，及半圓半徑 r = 36.506m，若競賽標準跑道的估算是按跑道內沿外擴 0.3m 來計算，請計算此標準跑道的總長度 P。若以上距離的觀測中誤差皆為$\sigma = \pm 0.005$m，則總長度的中誤差σ_P應為何?若跑道內的場域都要鋪設草坪，請估算應鋪設草坪的面積 A 及σ_A其中誤差。(所有答案皆須以適當的有效位數及單位表示之)(20 分)



【解題關鍵】
1.《考題難易》★★★
2.《破題關鍵》關鍵字：面積、周長、矩形、圓形。
重點提要：誤差傳播定律，外擴 0.3m 的效應。
【命中特區】
書名：土木　測量學
作者：賴明
章節出處：第一章 測量概論 之 第 5 節 誤差傳播定律之應用

【擬答】

㈠計算此標準跑道的總長度 P 及其中誤差 σ_P

已知：跑道內沿的直線段長度 $L = 84.392$m，半圓半徑 $r = 36.506$m

∵ 競賽標準跑道的估算是按跑道內沿外擴 0.3m 來計算

∴ 半圓半徑 $R = r + 0.3 = 36.506 + 0.3 = 36.806$m

此標準跑道的總長度　$P = 2\pi R + 2L$

$$P = 2\pi R + 2L = 2\pi \times 36.806 + 2 \times 84.392 = 400.043m$$

∵ $P = 2\pi R + 2L = 2\pi \cdot (r + 0.3) + 2L = 2\pi r + 2L + 0.6\pi$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(2\pi r + 2L + 0.6\pi) = 2\pi \text{，} \frac{\partial P}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}(2\pi r + 2L + 0.6\pi) = 2$$

$$\sigma_P = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)^2 \times \sigma_r^{\ 2} + \left(\frac{\partial P}{\partial L}\right)^2 \times \sigma_L^{\ 2}}$$ ，因為距離的觀測中誤差皆為 $\sigma = \pm 0.005$m

$$\sigma_P = \pm\sqrt{(2\pi)^2 \cdot \sigma^2 + 2^2 \cdot \sigma^2} = \pm 2 \times 0.005 \times \sqrt{\pi^2 + 1} = \pm 0.033m$$

∴ $P \pm \sigma_P = 400.043m \pm 0.033m$

(二)計算應鋪設草坪的面積 A 及其中誤差 σ_A

面積 A=矩形面積 A_1+2 個半圓形面積 A_2

矩形：長=L，寬 W=2r，面積 $A_1 = L \times W = L \times 2r = 2Lr$

2 個半圓形：面積 $A_2 = \pi r^2$

草坪面積 $A = A_1 + A_2 = 2Lr + \pi r^2$

$$A = 2 \times 84.392 \times 36.506 + \pi \times 36.506^2 = 10348.392 m^2$$

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(2Lr + \pi r^2) = 2L + 2\pi r = 2 \times 84.392 + 2\pi \times 36.506 = 398.158 m$$

$$\frac{\partial A}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}(2Lr + \pi r^2) = 2r = 2 \times 36.506 = 73.012 m$$

$$\sigma_A = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 \times \sigma_r^{\ 2} + \left(\frac{\partial A}{\partial L}\right)^2 \times \sigma_L^{\ 2}} = \pm 0.005 \times \sqrt{73.012^2 + 398.158^2} = \pm 2.024 m^2$$

$$\therefore\ A \pm \sigma_A = 10348.392 m^2 \pm 2.204 m^2$$

二、應用某全測站儀觀測 A 及 B 點間之斜距及縱角，以進行三角高程測量，若 A 點之高程及精度為$H_A = 650.762 \pm 0.020m$，儀器架設於 A 點(儀器高$h_i = 1.658 \pm 0.005m$)，稜鏡架設於 B 點(稜鏡高$h_r = 1.566 \pm 0.005m$)，觀測得其斜距 S = 256.971m，而以正鏡及倒鏡觀測縱角(天頂距)之讀數如下表，道先請依據縱角正倒鏡讀數估計縱角，進而請依據上述數據計算 B 點高程，若此全測站儀之測距先驗精度為±$(3mm + 10ppm)$，縱角觀測先驗精度為±20"，請計算 B 點高程之中誤差。(20 分)

測站	觀測點	鏡位	縱角讀數
A	B	正	$87^\circ 23' 32''$
		倒	$272^\circ 36' 06''$

【解題關鍵】

1.《考題難易》★★★

2.《破題關鍵》關鍵字：天頂距，三角高程，全測站儀。

重點提要：誤差傳播定律。

【命中特區】

書名：土木　測量學

作者：賴明

章節出處：第四章　角度測量　之　第 2 節　角度觀測　與　第 3 節　間接高程測量

【擬答】

(一)計算縱角(天頂距)$z \pm \sigma_z$

已知：正鏡 z_1=87°23'32"，倒鏡 z_2=272°36'06"，縱角觀測先驗精度 $\sigma_{z_1} = \sigma_{z_2} = \pm 20''$

縱角(天頂距) $z = \frac{1}{2}(z_1 + 360^\circ - z_2) = \frac{1}{2}(87^\circ 23'32'' + 360^\circ - 272^\circ 36'06'') = 87^\circ 23'43''$

$$\frac{\partial z}{\partial z_1}=\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\tfrac{1}{2}\left(z_1+360^\circ-z_2\right)\right]=\tfrac{1}{2}\text{，}\frac{\partial z}{\partial z_2}=\frac{\partial}{\partial z_2}\left[\tfrac{1}{2}\left(z_1+360^\circ-z_2\right)\right]=-\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{\sigma_z''}{\rho''}=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial z_1}\right)^2\times\left(\frac{\sigma_{z_1}''}{\rho''}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z_2}\right)^2\times\left(\frac{\sigma_{z_2}''}{\rho''}\right)^2}$$ ，等式左右同乘 ρ''，得

$$\sigma_z=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial z_1}\right)^2\times\sigma_{z_1}{}^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z_2}\right)^2\times\sigma_{z_2}{}^2}=\pm20''\times\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2}=\pm10\sqrt{2}''=\pm14.1''$$

㈡計算 B 點高程及其中誤差 $H_B\pm\sigma_{H_B}$

1. 計算斜距 σ_s

∵ 斜距 S=256.971m=0.256971km

∴ $\sigma_S=\pm\sqrt{3^2+(10\times0.256971)^2}=\pm3.95mm\approx\pm0.004m$

2. 計算 $H_B\pm\sigma_{H_B}$

已知：A 點高程 H_A=650.762±0.020m，儀器高 h_i=1.658±0.005m

稜鏡高 h_r=1.566±0.005m，斜距 S=256.971±0.004m

天頂距 $z\pm\sigma_z=87°23'43''\pm14.1''$

∵ $S=256.971m<350m$　　∴不考慮兩差

$$H_B=H_A+S\cdot\cos z+h_i-h_r$$

$$H_B=650.762+256.971\times\cos87°23'43''+1.658-1.566=662.532m$$

$$\frac{\partial H_B}{\partial H_A}=1\text{，}\frac{\partial H_B}{\partial h_i}=1\text{，}\frac{\partial H_B}{\partial h_r}=-1\text{，}\frac{\partial H_B}{\partial S}=\cos z\text{，}\frac{\partial H_B}{\partial z}=-S\cdot\sin z$$

$$\sigma_{H_B}=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial H_B}{\partial H_A}\right)^2\times\sigma_{H_A}{}^2+\left(\frac{\partial H_B}{\partial S}\right)^2\times\sigma_S{}^2+\left(\frac{\partial H_B}{\partial z}\right)^2\times\left(\frac{\sigma_z''}{\rho''}\right)^2+\left(\frac{\partial H_B}{\partial h_i}\right)^2\times\sigma_{h_i}{}^2+\left(\frac{\partial H_B}{\partial h_r}\right)^2\times\sigma_{h_r}{}^2}$$

$$\sigma_{H_B}=\pm\sqrt{\sigma_{H_A}{}^2+(\cos z)^2\times\sigma_S{}^2+(-S\cdot\sin z)^2\times\left(\frac{\sigma_z''}{\rho''}\right)^2+\sigma_{h_i}{}^2+\sigma_{h_r}{}^2}$$

$$\sigma_{H_B}=\pm\sqrt{0.02^2+(\cos87°23'43''\times0.004)^2+(-256.971\times\sin87°23'43'')^2\times\left(\frac{14.1''}{206265'}\right)^2+0.005^2+0.005^2}$$

$\sigma_{H_B}=\pm0.0276\approx\pm0.028m$，$H_B\pm\sigma_{H_B}=662.532m\pm0.028m$

三、設有 A,B,C 三個點位，其中 A 及 B 兩點之 TWD97 投影平面之(E,N)坐標(m)為已知，即 A(168500.123,2545003.361)及 B(168589.981,2544883.334)。依序於 A,B 及 C 三點架設經緯儀進行單角法觀測順鐘向水平角 θ_{BAC},θ_{ABC}及θ_{BCA}，得觀測數據如下表。首先請依據讀數計算 θ_{BAC},θ_{ABC}及θ_{BCA}，再依據敘述及角度值繪製點位及角度關係簡圖，並計算三角形閉合差，進

而依據已知坐標及觀測值計算 AB，BC，CA 邊方位角φ_{AB}，φ_{BC}，及φ_{CA}。(20 分)

測站	測點	鏡位	水平角讀數	正倒鏡平均	角度
A	B	正	123°45′52″		
		倒	303°45′32″		
	C	正	42°59′35″		
		倒	222°58′52″		
B	A	正	56°25′56″		
		倒	236°26′12″		
	C	正	100°59′35″		
		倒	281°00′12″		
C	B	正	183°27′50″		
		倒	3°28′05″		
	A	正	238°07′15″		
		倒	58°07′12″		

【解題關鍵】

1.《考題難易》★★★

2.《破題關鍵》關鍵字：水平角計算，方位角推估。

重點提要：需繪圖顯示相對位置。注意角度的點位旋轉方向。

【命中特區】

書名：土木　測量學

作者：賴明

章節出處：第四章 角度測量 之 第 2 節 角度觀測 以及 第五章 導線測量 之 第 1 節 導線測量基本觀念

【擬答】

㈠計算 θ_{BAC}，θ_{ABC} 及 θ_{BCA}

測站	測點	鏡位	水平角讀數	正倒鏡平均	角度
A	B	正	123°45'52"	123°45'42"	279°13'31.5"(外角)
		倒	303°45'32"		
	C	正	42°59'35"	42°59'13.5"	
		倒	222°58'52"		
B	A	正	56°25'56"	56°26'04"	44°33'49.5"
		倒	236°26'12"		
	C	正	100°59'35"	100°59'53.5"	
		倒	281°00'12"		
C	B	正	183°27'50"	183°27'57.5"	54°39'16"
		倒	3°28'05"		
	A	正	238°07'15"	238°07'13.5"	
		倒	58°07'12"		

$\therefore$ θ_{BAC}=279°13'31.5"(外角)，θ_{ABC}=44°33'49.5" 及 θ_{BCA}=54°39'16"

∠CAB=360°-θ_{BAC}=80°46'28.5"，∠ABC=θ_{ABC}=44°33'49.5"，∠BCA=θ_{BCA}=54°39'16"

三內角和$[\alpha] = \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 179°59'34''$

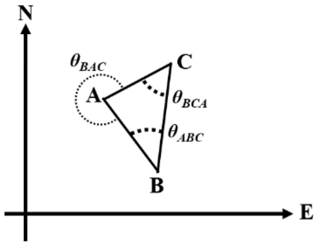
閉合差 $\omega = [\alpha] - 180° = -26''$，改正值 $\delta = -\omega/3 = -(-26'')/3 = 8.7''$

改正後 $\angle CAB = 80°46'37.2''$，

$\angle ABC = 44°33'58.1''$，

$\angle BCA = 54°39'24.7''$

點位及角度關係簡圖，如右圖所示。



(二)計算 AB，BC，CA 邊方位角

1. 計算 AB 邊方位角

$$\Delta E = \Delta E_{AB} = E_B - E_A = 168589.981 - 168500.123 = 89.858m$$

$$\Delta N = \Delta N_{AB} = N_B - N_A = 2544883.334 - 2545003.361 = -120.027m$$ ，第 II 象限

參數 $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{\Delta E}{\Delta N}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{89.858}{-120.027}\right| = 36°49'13.1''$

AB 邊方位角 $\phi_{AB} = 180° - \theta = 180 - 36°49'13.1'' = 143°10'46.9''$

2. 計算 BC，CA 邊方位角

$$\phi_{BC} = \phi_{AB} + 180° + \angle ABC - 360° = 143°10'46.9'' + 180° + 44°33'58.1'' - 360° = 7°44'45''$$

$$\phi_{CA} = \phi_{BC} + 180° + \angle BCA = 7°44'45'' + 180° + 54°39'24.7'' = 242°24'9.7''$$

$\therefore$ AB，BC，CA 邊方位角 $\phi_{AB} = 143°10'46.9'', \phi_{BC} = 7°44'45'', \phi_{CA} = 242°24'9.7''$

四、地形圖上表示地貌的等高線之最主要的兩種曲線類型為何？請分別說明這兩種曲線的用途及

線型。何謂等高線間距？等高線間距與描述地貌的詳細程度有何關係？地形圖比例尺與等高線間距的選擇有何種關連？最後請描述等高線在山脊及山谷地區所呈現的樣貌。(20 分)

【解題關鍵】

1.《考題難易》★★

2.《破題關鍵》關鍵字：等高線，等高線間距，山脊及山谷。重點提要：需要繪圖。

【命中特區】

書名：土木　測量學

作者：賴明

章節出處：第七章 工程測量　之　第 1 節 地形測量　之　二、等高線種類及特性

【擬答】

㈠地形圖上表示地貌的等高線之最主要的兩種曲線類型

分別為：主曲線(又稱首曲線)、計曲線。

㈡這兩種曲線的用途及線型

1. 主曲線

⑴用途：為用以表示地貌之基本等高線。

⑵線型：一般均以 0.2*mm* 之細實線繪畫。

2. 計曲線

⑴用途：為便於閱讀計算等高線，

⑵線型：通常每逢等高距五倍高程值之主曲線，繪以加粗之實線，並在適當位置標註高程值。

㈢等高線間距的意義

地形圖上二相鄰等高線的高程差，稱為等高線間距。

㈣等高線間距與描述地貌的詳細程度之關係

測區內地勢起伏愈大，高程差愈大，等高線間距宜較大。例如：山嶺區的等高線間距可使用 10 公尺或使 20 公尺。

㈤地形圖比例尺與等高線間距的選擇之關連

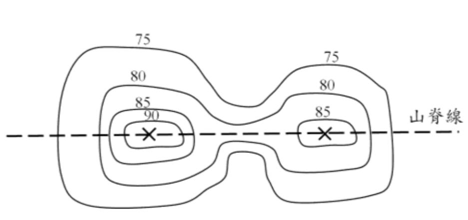
地形圖之比例尺較大者，例如：1/1000 或是 1/5000，其等高距應取較小值，例如：0.5 公尺或是 1 公尺。

㈥等高線在山脊及山谷地區所呈現的樣貌

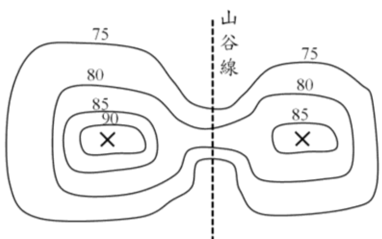
1. 等高線－山脊

山脊是山脈凸起的稜線，由山頂延伸到山腳。

將山脊高程最高的點，連接而成的線，稱為山脊線，通常是河川流域的分水嶺。山脊線兩側的等高線，一般是對稱。山脊線與穿越等高線是正交，交角近似 90 度。山脊線的開口，向較高處。



等高線-山脊線　　比例尺 1：10,000



等高線-山谷線　　比例尺 1：10,000

2. 等高線－山谷

山谷是兩個山脈之間的凹部。山谷線是谷底最低點的連線。山谷的等高線多呈 U 形
山谷線與穿越等高線是正交，交角近似 90 度。山谷線的開口，向較低處。

五、若有兩個地面點位 *A* 及 *B* 點，彼此相距不到一公里，今應用兩部 GNSS 衛星接收儀進行兩點間之靜態基線測量，觀測計算得這兩個點位間之基線分量為(△X, △Y, △Z)，請說明此基線分量的定義(請繪圖並以文字描述之)。若想從基線分量求得這兩點間之三度空間距離、平面距離及橢球高差，請說明其計算方法或程序。(20 分)

【解題關鍵】
1.《考題難易》★★★★★
2.《破題關鍵》關鍵字：靜態基線測量，基線分量，間接觀測平差。
重點提要：點位坐標=概略坐標+微調量。熟記間接觀測平差步驟。
【命中特區】
書名：土木　測量學
作者：賴明
章節出處：第九章 衛星定位測量　及　補充講義第十章 測量平差

【擬答】
㈠基線分量的定義
1. 相對定位的概念
⑴架設兩部接收儀。一部接收儀必須設置於已知點位上，稱為主站或參考站。另一部接收儀則設置在待求點位上（未知點位），稱為待測站或移動站。將主站與移動站的資料做差分處理，以求得點位的坐標。
⑵相對定位為求解 *A*、*B* 兩測站之間，相對位置的一種定位方法，其目的是從已知坐標之參考點，推求出未知點的坐標。換句話說，相對定位的目標乃在於決定 *A*、*B* 兩點間之基線向量 $\Delta\vec{R}_{AB}$。假設在某一坐標系中，參考測站 A 的位置向量 $\vec{R}_A$ 為已知，若可利用 *GPS* 衛星決定出，在相同坐標系中，*A*、*B* 兩點間的基線向量 $\Delta\vec{R}_{AB}$，而根據向量方程式：$\vec{R}_B=\vec{R}_A+\Delta\vec{R}_{AB}$，則可求得在相同坐標系中未知測站 *B* 的位置向量 $\vec{R}_B$。

其中；$\vec{R}_A=\vec{R}^j-\vec{e}_A{}^j r_A{}^j$ ，$\vec{R}_B=\vec{R}^j-\vec{e}_B{}^j r_B{}^j$

$$\Delta\vec{R}_{AB}=\vec{R}_B-\vec{R}_A=\begin{bmatrix}X_B-X_A\\Y_B-Y_A\\Z_B-Z_A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta X_{AB}\\\Delta Y_{AB}\\\Delta Z_{AB}\end{bmatrix}=\vec{e}_A{}^j r_A{}^j-\vec{e}_B{}^j r_B{}^j$$

式中；$\vec{R}^j$ 為各衛星之位置向量(已知)。$\vec{e}_A{}^j$ 、$\vec{e}_B{}^j$ 為各衛星之單位向量

$r_A{}^j$ 為測站 A 至各衛星之距離。$r_B{}^j$ 為測站 B 至各衛星之距離

j 為衛星編號，例如：1，2，3，4，……

(△*X*, △*Y*, △*Z*)為基線分量

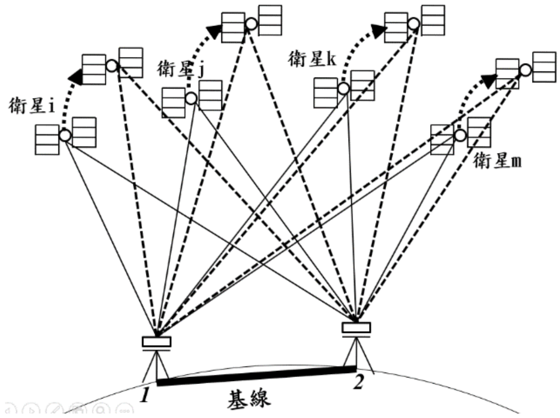
因此，兩測站若採取同步觀測，則大部份誤差，對於 A、B 兩測站在進行基線向量計算時，或因誤差大小相同而對消；或因誤差相似，而絕大部份誤差已減小，使得殘留下來的誤差已大大減少。

2.二點精確定位的概念

如右圖

採用單基線模式(以二測站觀測四衛星為例)。

假設地面點位 1 與 2，需要獲得高精度的坐標，經由同步觀測的二次差，求差，可獲得基線分量($\triangle X, \triangle Y, \triangle Z$)。



㈡若想從基線分量求得這兩點間之三度空間距離、平面距離及橢球高差，其計算方法或程序說明如下：

1.假設二點的單點定位坐標為 $1(X_1^o, Y_1^o, Z_1^o)$ 、$2(X_2^o, Y_2^o, Z_2^o)$ ，其坐標分量微小調整量為 $(\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1)$ 以及 $(\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2)$ ，亦即，

平差後第 1 點坐標 $X_1 = X_1^o + \delta x_1$ ，$Y_1 = Y_1^o + \delta y_1$ ，$Z_1 = Z_1^o + \delta z_1$

平差後第 2 點坐標 $X_2 = X_2^o + \delta x_2$ ，$Y_2 = Y_2^o + \delta y_2$ ，$Z_2 = Z_2^o + \delta z_2$

2.採用測量平差法之間接觀測平差，基於最小二乘法，計算二點坐標分量微小調整量 $(\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1)$ 以及 $(\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2)$ (作為未知量)。

間接觀測平差的計算程序：

第 1 步驟：寫出觀測方程式(*Observational Equation*)

$$\begin{cases} \Delta X_{12} + v_1 = X_2 - X_1 \\ \Delta Y_{12} + v_2 = Y_2 - Y_1 \\ \Delta Z_{12} + v_3 = Z_2 - Z_1 \end{cases}$$

改正數方程式(*Residual Equation*)：

$$\begin{cases} v_1 = X_2 - X_1 - \Delta X_{12} = \delta x_2 - \delta x_1 + X_2^o - X_1^o - \Delta X_{12} \\ v_2 = Y_2 - Y_1 - \Delta Y_{12} = \delta y_2 - \delta y_1 + Y_2^o - Y_1^o - \Delta Y_{12} \\ v_3 = Z_2 - Z_1 - \Delta Z_{12} = \delta z_2 - \delta z_1 + Z_2^o - Z_1^o - \Delta Z_{12} \end{cases}$$

第 2 步驟：由改正數方程式，寫出矩陣式 $V = AX - L$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{3\times1} ,\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times6} ,\ X = \begin{bmatrix} \delta x_1 & \delta y_1 & \delta z_1 & \delta x_2 & \delta y_2 & \delta z_2 \end{bmatrix}^T ,$$

$$L=\begin{bmatrix}\Delta X_{12}+X_1^o-X_2^o\\ \Delta Y_{12}+Y_1^o-Y_2^o\\ \Delta Z_{12}+Z_1^o-Z_2^o\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

第 3 步驟：組法方程式：$NX=U$ ，$N=A^TA$，$U=A^TL$

第 4 步驟：計算反方程式 N^{-1}

第 5 步驟：計算未知量矩陣 $X=N^{-1}U$

第 6 步驟：計算 v_i ，誤差平方和 $[vv]$，觀測值中誤差 $m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}}$

第 7 步驟：計算未知量 x_i 之中誤差 M_{x_i} ：$\frac{M_{x_i}^{\ 2}}{m^2}=N^{-1}$ 之 a_{ii} 元素值

㈢計算這兩點間之三度空間距離、平面距離及橢球高差

三度空間距離 $S=\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2+(Z_2-Z_1)^2}$

平面距離 $D=\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2}$

橢球高差 $\Delta h=Z_2-z_1$