

## 111 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試

類 科：機械工程

科 目：自動控制

陳銘老師

一、考慮控制系統的輸入為  $u$ ，輸出為  $y$ ，初始條件為零，其動態方程式表示如下列(一)與(二)，寫下輸入與輸出間之轉移函數為何？

$$(一) \dot{x} = -5x + 3u, y = 7x \quad (10 \text{ 分})$$

$$(二) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (10 \text{ 分})$$

1. 《考題難易》：

★★：簡單

2. 《破題關鍵》：

使用拉氏轉換與狀態方程式即可解題

【擬答】

(一)使用拉氏轉換：

$$(s+5)X = 3U \Rightarrow X = \frac{3}{s+5}U$$

$$\therefore Y = 7X = 7 \times \frac{3}{s+5}U \Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{21}{s+5}$$

(二)  $\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow (sI - A)X(s) = BU \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU$  代入

$$y = Cx + Du$$

$$\text{則 } Y = C(sI - A)^{-1}BU + DU = [C(sI - A)^{-1}B + D]U$$

$$\text{所以 } T(s) = \frac{Y}{U} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{21(s+1)}{(s+5)(s+1)} = \frac{21}{s+5}$$

二、假設有一個二階控制系統，其阻尼比 (damping ratio) 為 0.5，自然頻率為 100 rad/s，整體系統的 DC 增益值 (gain) 為 1。求此系統的單位步階響應 (unit step response)。(15 分) 求此系統的穩態誤差為多少？(5 分)

1. 《考題難易》：

★★：簡單

2. 《破題關鍵》：

需瞭解二階響應的暫態與穩態響應

【擬答】

(一)二階系統閉回路轉移函數可表示為：

$$G(s) = \frac{10000}{s^2 + 100s + 10000}$$

$$Y(s) = \frac{10000}{s(s^2 + 100s + 10000)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 100}{s^2 + 100s + 10000} = \frac{1}{s} - \frac{(s + 50) + \frac{1}{\sqrt{3}} \times (50\sqrt{3})}{(s + 50)^2 + (50\sqrt{3})^2}$$

$$y(t) = 1 - e^{-50t} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(50\sqrt{3}t) + \cos(50\sqrt{3}t) \right]$$

(二) 穩態誤差為下式：

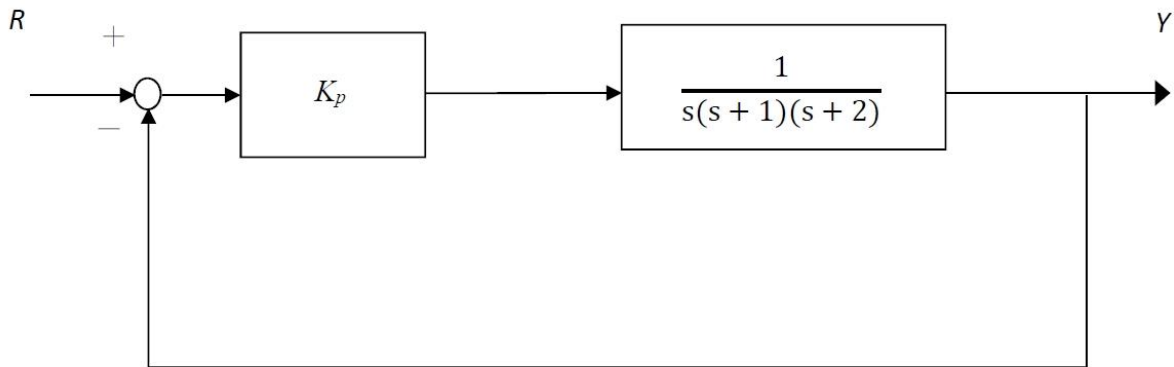
$$y(\infty) = e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} 1 - e^{-50t} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(50\sqrt{3}t) + \cos(50\sqrt{3}t) \right] = 1$$

三、下列一閉迴路系統之比例控制器為  $K_p$ 。

(一) 寫出此系統輸入與輸出之間對應的微分方程式。(4 分)

(二) 求當  $K_p$  分別為 3 時，畫出極零點所在的位置，以及其單位步階響應。(8 分)

(三) 求當  $K_p$  分別為 8 時，畫出極零點所在的位置，以及其單位步階響應。(8 分)



1. 《考題難易》：

★★★：普通

2. 《破題關鍵》：

瞭解閉迴路系統響應

【擬答】

(一) 閉迴路系統增益如下：

$$\frac{Y}{R} = \frac{\frac{K_p}{s(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{K_p}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{K_p}{s^3 + 3s^2 + 2s + K_p}$$

$$y'' + 3y' + 2y + K_p y = K_p r$$

(二) 轉移函數如下：

$$\frac{Y}{R} = \frac{3}{s^3 + 3s^2 + 2s + 3} = \frac{3}{(s + 2.672)(s + 0.164 - j1.047)(s + 0.164 + j1.047)}$$

極點為  $s = -2.672$  ;  $s = -0.164 + j1.047$  ;  $s = -0.164 - j1.047$



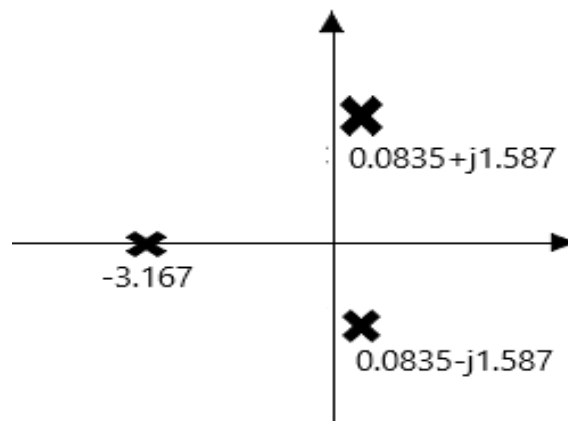
$$Y(s) = \frac{3}{s(s+2.672)(s^2+0.328s+1.123)} = \frac{1}{s} + \frac{-0.152}{s+2.672} - \frac{0.848(s+0.164)+0.545}{s^2+0.328s+1.123}$$

$$y(t) = 1 - 0.153e^{-2.672t} - 0.848e^{-0.164t} \cos 1.047t - 0.52e^{-0.164t} \sin 1.047t$$

(三)轉移函數如下：

$$\frac{Y}{R} = \frac{8}{s^3+3s^2+2s+8} = \frac{8}{(s+3.167)(s-0.0835-j1.587)(s-0.0835+j1.587)}$$

極點為  $s=-3.167$  ;  $s=0.0835+j1.587$  ;  $s=0.0835-j1.587$



$$Y(s) = \frac{8}{s(s+3.167)(s^2-0.167s+2.526)} = \frac{1}{s} + \frac{-0.193}{s+3.167} - \frac{0.807(s-0.083)+1.366}{s^2-0.167s+2.526}$$

$$y(t) = 1 - 0.193e^{-3.167t} - 0.807e^{0.083t} \cos 1.587t - 0.861e^{0.083t} \sin 1.587t$$

四、寫出下列轉移函數波德圖 (Bode plot) 的大小 (magnitude) 與相位 (phase) 之數學表示式，(6 分) 並以漸近線 (asymptote) 的方式繪出波德圖。(14 分)

$$\frac{1}{(S+1)(S+10)}$$

1. 《考題難易》：

★★：簡單

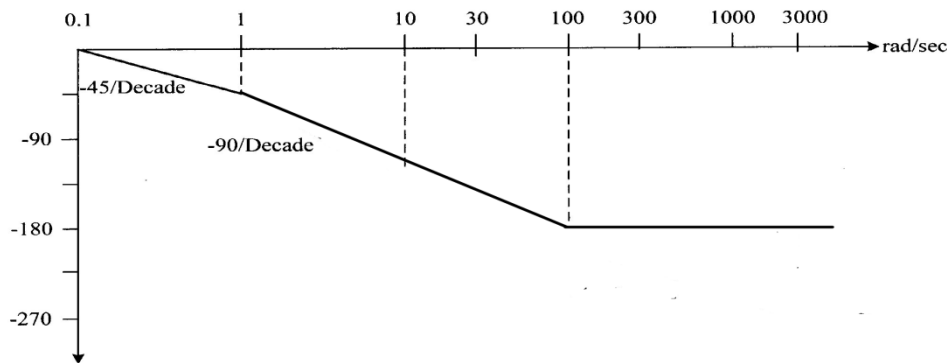
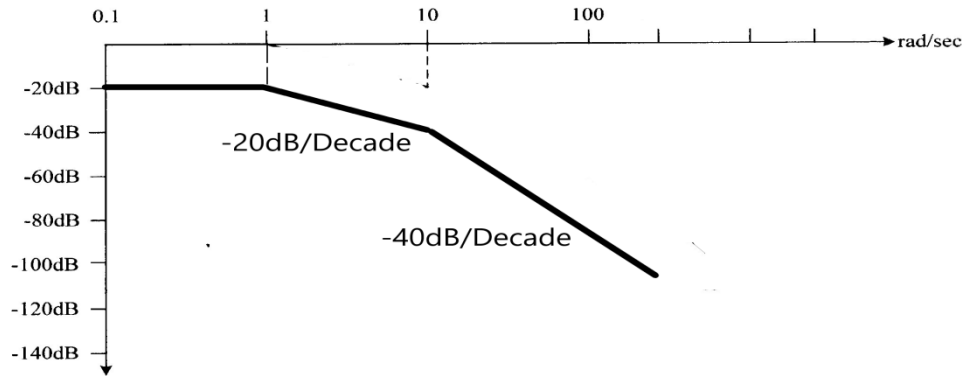
2. 《破題關鍵》：

熟悉波德圖畫法

【擬答】

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2} \sqrt{1 + \omega^2}}$$

$$\angle T(j\omega) = -\tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right)$$



志光 保成 學儒

# 真的有輕鬆考取的方法!

## 掌握上榜 8 大招

<p><b>法科架構班</b> 結合實務例子 建構法科概念</p>	<p><b>扎實正規班</b> 完整堂數 循序漸進</p>	<p><b>工科全科班</b> 公職+國營 一次到位</p>	<p><b>作文實戰班</b> 強化寫作架構 理清邏輯概念</p>
<p><b>主題題庫班</b> 主題教學 考點分析</p>	<p><b>精華總複習</b> 掌握考點 增強實力</p>	<p><b>全真模擬考</b> 比照真實考試 檢視應考實力</p>	<p><b>考前關懷講座</b> 名師最終提點 觀念更加清晰</p>

公職王歷屆試題 (111 地方政府特考)

五、畫出下列開迴路轉移函數系統之根軌跡，其中 K 值為正值。(20 分)

$$GH(S) = \frac{K}{S(S+1)(S+3)(S+4)}$$

1. 《考題難易》：  
 ★★★：普通
2. 《破題關鍵》：  
 熟悉根軌跡畫法

【擬答】

極點分別為： $s=0,-1,-3,-4$  共 4 個極點，而零點則為無。

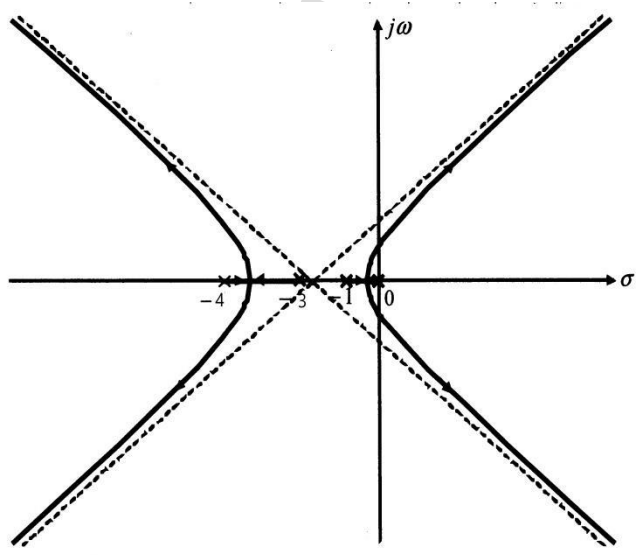
漸近線角度： $\theta_A = \pm 45^\circ; \pm 135^\circ$

漸近線與實軸交點： $\sigma_A = -2$

分叉點：由  $\frac{dG}{dS} = 0$ ，可得  $2s^3 + 12s^2 + 19s + 6 = 0$

分離點為  $-0.42$ 、 $-1.95$ (不合)、 $-3.66$

(一)根軌跡圖如下：



(二) Routh-Hurwitz 表如下：

$s^4$	1	19	K
$s^3$	8	12	
$s^2$	$35/2$	K	
$s^1$	$\frac{210-8K}{17.5}$		
$s^0$	K		

需閉迴路穩定， $0 < K < 26.25$

(三)當系統為臨界穩定之 K 值為 26.25

(四)輔助方程式為  $A(s) = 17.5s^2 + 26.25 = 0 \Rightarrow s = \pm j1.22 \Rightarrow \omega = 1.22 \text{ rad} / s$