111 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　別：四等考試
類　科：統計
科　目：統計學概要

吳迪老師

一、求解下列二子題：

㈠計有觀察值個數為 250 的資料集（data set），其分佈大致呈鐘形分佈（bell shaped），已知平均值為 50，標準差為 10。大約有多少個觀測值位於 30 到 50 之間？（10 分）

㈡計有觀察值個數為 160 的數值資料集（data set），已知平均值為 70，標準差為 10。至少有多少個觀察值介於 50 和 90 之間？（10 分）

1.《考題難易》：★非常簡單
2.《破題關鍵》：考常態分配與非常態分配的解法，常考題。

【擬答】

㈠ X~N (50,10)

$\Rightarrow P(30\le x\le 50)=P\left(\frac{30-50}{10}\le z\le\frac{50-50}{10}\right)$

$=P(-2\le z\le 0)=0.4772$

$\therefore 250\times 0.4772=119.3$

大約有 119 個介於 30 到 50 之間

㈡利用 Chebyshev's Inequality

$P(|x-\mu|\le k\sigma)\ge 1-\frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow P(50\le x\le 90)=P(|x-70|\le 2\times 10)\ge 1-\frac{1}{2^2}=0.75$

$\therefore 160\times 0.75=120$

至少有 120 個介於 50 和 90 之間

二、已知間斷隨機變數 X，其機率質量函數如下所示：

$P(X=x)=\frac{1}{4}$，$x=-1, 4, 8.$

㈠求母群體平均數 E(X)。（5 分）

㈡求母群體的變異數 Var(X)。（5 分）

㈢驗證 Var(X+1)是否與 Var(X)相等？需計算 Var(X+1)。（5 分）

㈣驗證 Var(-X)是否與 Var(X)相等？需計算 Var(-X)。（5 分）

1.《考題難易》：★非常簡單
2.《破題關鍵》：離散型隨機變數的期望值與變異數的公式與性質，基本題。

【擬答】

㈠

$$E(X)=\sum Xf(X)=\frac{11}{4}=2.75$$

㈡

$$E(X^2)=\sum X^2 f(X)=\frac{81}{4}$$

$$\Rightarrow Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{81}{4}-\left(\frac{11}{4}\right)^2=12.6875$$

㈢

$$Var(X+1)=E[(X+1)^2]-[E(X+1)]^2$$
$$=E(X^2+2X+1)-[E(X)+1]^2$$
$$=E(X^2)+2E(X)+1-[E(X)]^2-2E(X)-1$$
$$=E(X^2)-[E(X)]^2=Var(X)$$

㈣

$$Var(-X)=E[(-X)^2]-[E(-X)]^2$$
$$=E(X^2)-[-E(X)]^2$$
$$=E(X^2)-[E(X)]^2=Var(X)$$

註:此題也可將 X+1 的機率分配求出來驗證㈢㈣

三、假設兩隨機變數 X 和 Y，其聯合質量機率函數如下：

$P(X=x,Y=y)=\dfrac{x+y}{23}$，$x=1,2,4$，$y=1,2$。

㈠計算隨機變數 X 和 Y 的各自邊際質量機率函數。（10 分）

㈡隨機變數 X 和 Y 是否獨立？驗證你的答案。（10 分）

1.《考題難易》：★非常簡單
2.《破題關鍵》：離散型聯合機率函數的性質，基本題。

【擬答】

㈠

$$f(x)=\sum_y f(x,y)=\frac{x+1}{23}+\frac{x+2}{23}$$

$$=\frac{2x+3}{23},x=1,2,3$$

$$f(y)=\sum_x f(x,y)=\frac{1+y}{23}+\frac{2+y}{23}=\frac{4+y}{23}$$

$$=\frac{3y+7}{23},y=1,2$$

㈡

$$P(X=1)=\frac{5}{23}, P(Y=1)=\frac{10}{23}$$

$$P(X=1,Y=1)=\frac{2}{23}$$

因為 P(X=1,Y=1)≠P(X=1) P(Y=1)

∴X,Y 不獨立

四、一位研究人員對特定的公司比較女性和男性員工的工資，已知男女員工薪資服從常態分配。簡單隨機抽樣得 23 名獨立樣本，其中 8 名女性員工和 15 名男性員工。全部雇員每月的工資如下（以萬元計）：

女性	4.95	7.60	5.56	9.04	5.20	10.05	7.43	6.60
男性	7.22	5.18	5.62	9.04	8.80	11.50	5.20	8.05
	5.00	4.80	12.50	9.70	7.50	6.05	16.40	

在 5%的顯著水準下，數據是否提供了足夠的證據得出結論公司女員工平均工資低於男員工平均工資。

㈠寫出此題的虛無假設與對立假設。（5 分）

㈡兩組資料的變異數（variance）是否相等？以適當的檢定統計量計算之。（12 分）

㈢陳述子題㈠之檢定統計量並利用上述資料計算之。（12 分）

㈣陳述子題㈠的棄卻域（rejection region），並作此題的結論。（11 分）

$t_{0.05,22}=1.717$, $t_{0.05,21}=1.721$, $t_{0.05,20}=1.725$, $t_{0.95,22}=-1.717$,

$t_{0.95,21}=-1.721$, $t_{0.95,20}=-1.725$, $f_{0.05,7,14}=2.7642$,

$f_{0.05,8,15}=2.6408$, $f_{0.05,14,7}=3.5292$, $f_{0.05,15,8}=3.2184$。

1.《考題難易》：★★簡單
2.《破題關鍵》：二母體變異數與平均數的檢定，常考題。

【擬答】

設 X_1 為男性薪資

X_2 為女性薪資

$\overline{X_1}=8.17,\ S_1{}^2=10.90\ ,\ n_1=15$

$\overline{X_2}=7.05,\ S_2{}^2=3.38\ ,\ n_2=8$

㈠

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 \le \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

㈡

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2 \\ H_1: \sigma_1{}^2 \ne \sigma_2{}^2 \end{cases}$$

$\alpha=0.05$

$C=\{F \mid F > F_{0.05,14.7}=3.5292\}$

註：此題只有附 $F_{0.05}$ 的值

檢定統計量

$$F=\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2}=\frac{10.90}{3.38}=3.22\notin C\Rightarrow not\ ReHo$$

即兩組資料變異數相等${\sigma_1}^2={\sigma_2}^2$

㈢

$$令{\sigma_1}^2={\sigma_2}^2={S_p}^2=\frac{(n_1-1){S_1}^2+(n_2-1){S_2}^2}{n_1+n_2-2}$$

$$=\frac{(15-1)\times 10.90+(8-1)\times 3.38}{15+8-2}=8.39$$

檢定統計量

$$t=\frac{(\overline{x_1}-\overline{x_2})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{{S_p}^2}{n_1}+\frac{{S_p}^2}{n_2}}}=\frac{(8.17-7.05)-0}{\sqrt{\frac{8.39}{15}+\frac{8.39}{8}}}=0.8832$$

㈣

$\alpha=0.05$

$C=\{t|t>t_{0.05,21}=1.721\}$

$\because t=0.8832\notin C\Rightarrow not\ ReHo$

結論：沒有證據顯示女員工平均工薪低於男員工平均工資