111 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　別：三等考試
類　科：經建行政、農業行政
科　目：統計學

王瑋老師

甲、申論題部分：

一、某研究擬測試三種品牌汽油的每加侖所能行駛之英哩數。由於不同廠牌汽車的汽油性能特點不同，實驗選取 4 個廠牌汽車作為區集；意即，每個廠牌的汽車都用每種類型的汽油進行測試。實驗結果如下表：（以英哩/加侖為單位）

		汽油品牌		
		I	II	III
汽車	甲	18	21	27
	乙	24	23	28
	丙	20	25	30
	丁	22	23	27

㈠試計算並列出適合此實驗設計的變異數分析表（ANOVA Table）。（20 分）

㈡試寫出檢驗三種品牌汽油之每加侖英哩數差異的虛無假設與對立假設，計算檢定統計量，並說明在 5%之顯著水準下，三種品牌汽油之每加侖英哩數是否有顯著差異。（10 分）

【解題關鍵】
1.《考題難易》★☆☆☆☆
2.《破題關鍵》非常基本的考題，區集設計雖然沒有很常考，但最近在 110 年高考統計有命題，所以還是要留意計算上的細節。

【擬答】

㈠汽油品牌 $\bar{X}_{\cdot 1}=21$　$\bar{X}_{\cdot 2}=23$　$\bar{X}_{\cdot 3}=28$　$\bar{X}_{\cdot\cdot}=24$

汽車廠牌 $\bar{X}_{1}.=22$　$\bar{X}_{2}.=25$　$\bar{X}_{3}.=25$　$\bar{X}_{4}.=24$

此為單因子區集設計

$$SSTR=\sum\sum(\bar{X}_{\cdot j}-\bar{X}_{\cdot\cdot})^2=4\times(21-24)^2+\ldots=104$$

$$SSB=\sum\sum(\bar{X}_{i}.-\bar{X}_{\cdot\cdot})^2=3\times(22-24)^2+\ldots=18$$

$$SST=\sum\sum(X_{ij}-\bar{X}_{\cdot\cdot})^2=(18-24)^2+\ldots+(27-24)^2=138$$

$$SSE=SST-SSTR-SSB=16$$

此為單因子區集設計，變異數分析表如下

ANOVA 表

	SS	df	MS	F
Treatment	104	2	52	19.5
Block	18	3	6	2.25
Error	16	6	2.667	
Total	138	11		

㈡ H_0 : 三種品牌汽油之每加侖英哩數無差異

H_1 : 三種品牌汽油之每加侖英哩數有差異

$\alpha=0.05$

$F^*=19.5\notin C$

$C:\{F^* > F_{0.05}(2,6) = 5.14\}$

拒絕 H_0，有顯著證據說 H_1：三種品牌汽油之每加侖英哩數有差異

二、假設 X_i 為解釋變數、Y_i 為反應變數，且 $i = 1,2,\ldots,n$。為了描述兩變數之關聯性，擬建立簡單線性迴歸模型：$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$，其中 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ 為獨立且相同 $N(0,\sigma^2)$ 分佈之誤差。請利用下方訊息回答問題：

$n = 14$，$\sum_{i=1}^n X_i = 630$，$\sum_{i=1}^n Y_i = 520$，$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = 20940$，

$\sum_{i=1}^n X_i^2 = 30300$，$\sum_{i=1}^n Y_i^2 = 22482$

㈠試計算並寫出最小平方估計方程式。（10 分）

㈡試計算並解釋判定係數（Coefficient of Determination; R^2）及樣本相關係數（Sample Correlation Coefficient）。（10 分）

㈢試計算並解釋當 X=45 時，Y 的期望值之 95%信賴區間。（10 分）

（參考值：$t_{0.025,12} = 2.179$，$t_{0.05,12} = 1.782$，$t_{0.025,13} = 2.160$，$t_{0.05,13} = 1.771$，$t_{0.025,14} = 2.145$，$t_{0.05,14} = 1.761$）

【解題關鍵】

1.《考題難易》★★☆☆☆

2.《破題關鍵》迴歸分析已是近年來必考的範圍，本題計算量中等，但仍須謹慎計算，屬必須拿分的題目。除 110 年普考有類似題外，108 年普考亦有考出類似的預測區間考題。

【擬答】

㈠ $$SS_X = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} = 30300 - \frac{630^2}{14} = 1950$$

$$SS_Y = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n} = 22482 - \frac{520^2}{14} = 3167.7143$$

$$SS_{XY} = \sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n} = 20940 - \frac{630\times 520}{14} = -2460$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = \frac{-2460}{1950} = -1.2615$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = \frac{520}{14} - (-1.2615)\times\frac{630}{14} = 93.9104$$

迴歸方程式為 $\hat{Y} = 93.9104 - 1.2615X$

㈡ $$R^2 = \frac{SS_{XY}^2}{SS_X \cdot SS_y} = \frac{(-2460)^2}{1950\times 3167.7143} = 0.9797$$

$$r_{X,Y} = \frac{SS_{XY}}{\sqrt{SS_X \cdot SS_y}} = \frac{-2460}{\sqrt{1950\times 3167.7143}} = -0.9898$$

㈢ $$MSE = \frac{SSE}{n-2} = \frac{SS_Y - \hat{\beta}_1^2 \cdot SS_X}{14-2}$$

$$= \frac{3167.7143 - (-1.2615)^2 \cdot 1950}{12} = 5.3766$$

$X = 45$，$\hat{Y} = 93.9104 - 1.2615\times 45 = 37.1429$

Y 之期望值 95%信賴區間為

$$\hat{Y} \pm t_{0.025}(n-2)\sqrt{(\frac{1}{n}+\frac{(x_h-\bar{X})^2}{SS_X})MSE}$$

$$\Rightarrow 37.1429 \pm 2.179\sqrt{(\frac{1}{14}+\frac{(45-45)^2}{1950})5.3766}$$

$$\Rightarrow [35.7925, 38.4933]$$

三、定義 X 及 Y 為獨立的標準常態分布隨機變數，令 $U = X / Y$ 及 $V = |Y|$。試計算 U 和 V 之機率密度函數，並說明 U 和 V 分別為何分布。（20 分）

【解題關鍵】
1.《考題難易》★★★☆☆
2.《破題關鍵》兩個標準常態相除為標準柯西分配，亦為自由度為 1 之 T 分配，過去雖無此證明，但此分配關係應屬必要知識，所以僅須透過雙變數轉換來求得其機率函數，主要的困難在於微積分的技巧。至於標準常態分配的絕對值稱為標準半常態分配，雖然是較為冷門的分配，但利用變數變換求得機率密度函數並不困難，同學不要因為沒有看過而放棄作答。

【擬答】

㈠ $X, Y \sim N(0,1)$ 且 $X \coprod Y$

$$f(x,y)=f(x)f(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty$$

令 $\begin{matrix} U=\frac{X}{Y} \\ W=Y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} X=UW \\ Y=W \end{matrix} \Rightarrow |J|=\left\|\begin{matrix} U & W \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|=|W|$

$$f(u,w)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2w^2+w^2}{2}}\cdot|w|$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(u^2+1)w^2}{2}}\cdot|w| \quad , -\infty<u<\infty, -\infty<w<\infty$$

$$\therefore f(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u,w)dy_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(u^2+1)w^2}{2}}\cdot|w|dw \quad \text{（}w\text{ 之偶函數積分）}$$

$$=2\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(u^2+1)^2w^2}{2}}\cdot wdw$$

$$=\left(\frac{1}{\pi(u^2+1)}e^{-\frac{(u^2+1)w^2}{2}}\right)\Bigg|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2}\quad,-\infty<u<\infty$$

所以 $U \sim Canchy(1,\ 0) \sim T(1)$

即標準柯西分配，亦為自由度 1 之 T 分配

㈡ $V=|Y|$

(a) $-\infty<Y<0$

$$Y=-V\ ，|J|=\left|\frac{dY}{dV}\right|=1$$

$$f(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}\cdot 1\quad 0<v<\infty$$

(b) $0<Y<\infty$

$$Y=V\ ，|J|=\left|\frac{dY}{dV}\right|=1$$

$$f(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}\cdot 1\quad 0<v<\infty$$

(a)(b)範圍相同，機率函數合併

$$f(v)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}},0<v<\infty$$

所以 V 服從標準半常態分配(half-normal distribution)

註：半常態分配為摺疊常態分配(folded-normal distribution)的特例

若 $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$，$V=|X|$，則 $V \sim FN(\mu,\sigma^2)$

$$f(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(v+\mu)^2}{2\sigma^2}},0<v<\infty$$

四、定義母群體平均值為μ，欲進行假設檢定問題：

H_0（虛無假設）：$\mu = 10$；H_a（對立假設）：$\mu \neq 10$。

已知母群體標準差為 6，樣本數是 36。在 95%的信心水準之下，當真實的母群體平均值為 10.68 時，試計算並說明進行此檢定最合適的檢定統計量之檢定力（Power）是多少？（20 分）

【解題關鍵】

1.《考題難易》★★☆☆☆

2.《破題關鍵》檢定力的計算屬假設檢定課內範圍，但本題為雙尾檢定，拒絕域機率的計算需要小心，建議利用範圍中間的機率較容易推導計算， 107 年原特三等經建有類似考題，可供演練參考。

【擬答】

$H_0: \mu = 10 \quad H_1: \mu \neq 10$

拒絕域可設為$C: \{\bar{X} > k_1 \ or \ \bar{X} < k_2\}$

$$1-\alpha = 0.95 = P(k_1 \le Z \le k_2 \mid \mu = 10)$$

$$= P\left(\frac{k_1 - 10}{6/\sqrt{36}} \le Z \le \frac{k_2 - 10}{6/\sqrt{36}}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k_1 - 10}{6/\sqrt{36}} = -1.96 & \Rightarrow k_1 = 8.04 \\ \dfrac{k_2 - 10}{6/\sqrt{36}} = 1.96 & \Rightarrow k_2 = 11.96 \end{cases}$$

檢定力 $power = 1 - P(k_1 \le Z \le k_2 \mid \mu_1 = 10.68)$

$$= 1 - P(8.04 \le Z \le 11.96 \mid \mu_1 = 10.68)$$

$$= 1 - P\left(\frac{8.04 - 10.68}{6/\sqrt{36}} \le Z \le \frac{11.96 - 10.68}{6/\sqrt{36}}\right)$$

$$= 1 - P(-2.64 \le Z \le 1.28) = 0.8956$$

附表一、標準常態分布表(左尾機率)，例如：$P(Z \leq 1.96) = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

附表二、F分布表(右尾機率)，例如：$P(F_{1,2} > 8.53) = 0.10$

Denominator Degrees of Freedom	Area in Upper Tail	Numerator Degrees of Freedom 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	40	60	100	1000
1	.10	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	61.22	61.74	62.05	62.26	62.53	62.79	63.01	63.30
	.05	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	245.95	248.02	249.26	250.10	251.14	252.20	253.04	254.19
	.025	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	984.87	993.08	998.09	1001.40	1005.60	1009.79	1013.16	1017.76
	.01	4052.18	4999.34	5403.53	5624.26	5763.96	5858.95	5928.33	5980.95	6022.40	6055.93	6156.97	6208.66	6239.86	6260.35	6286.43	6312.97	6333.92	6362.80
2	.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
	.05	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.49
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
	.01	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.43	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
3	.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.20	5.18	5.17	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
	.05	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.96	13.91
	.01	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	26.87	26.69	26.58	26.50	26.41	26.32	26.24	26.14
4	.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
	.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.66	8.56	8.50	8.46	8.41	8.36	8.32	8.26
	.01	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.65	13.58	13.47
5	.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.324	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.13	3.11
	.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.43	4.41	4.37
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.43	6.33	6.27	6.23	6.18	6.12	6.08	6.02
	.01	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.20	9.13	9.03
6	.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.76	2.75	2.72
	.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.74	3.71	3.67
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.27	5.17	5.11	5.07	5.01	4.96	4.92	4.86
	.01	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.06	6.99	6.89
7	.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.51	2.50	2.47
	.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.57	4.47	4.40	4.36	4.31	4.25	4.21	4.15
	.01	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.82	5.75	5.66
8	.10	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.30
	.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
	.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.10	4.00	3.94	3.89	3.84	3.78	3.74	3.68
	.01	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.03	4.96	4.87
9	.10	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21	2.19	2.16
	.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.79	2.76	2.71
	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.77	3.67	3.60	3.56	3.51	3.45	3.40	3.34
	.01	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.48	4.41	4.32
10	.10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.11	2.09	2.06
	.05	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.62	2.59	2.54
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.52	3.42	3.35	3.31	3.26	3.20	3.15	3.09
	.01	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.08	4.01	3.92
11	.10	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.01	1.98
	.05	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.49	2.46	2.41
	.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.33	3.23	3.16	3.12	3.06	3.00	2.96	2.89
	.01	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.78	3.71	3.61
12	.10	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.96	1.94	1.91
	.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.38	2.35	2.30
	.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.18	3.07	3.01	2.96	2.91	2.85	2.80	2.73
	.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.54	3.47	3.37