111 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　別：四等考試
類　科：電信工程
科　目：通信系統概要

伍霖老師

一、有一基頻訊號 $m(t)=cos(20\pi t)$，假設此訊號以 $k_f=50$ 做 FM 調變。

㈠請問其調變指數為何？（6 分）

㈡若將 $m(t)$做振幅為 1，載波頻率為 100 MHz 的 FM 調變，請問調變後 FM 信號之數學方程式可表示為何？（7 分）

㈢根據卡森法則（Carson's rule），此 FM 信號之頻寬為何？（7 分）

《考題難易》★★★：普通

《破題關鍵》：

1. FM 訊號表示為 $s(t)=A_c\cos\left[2\pi f_c t+\underbrace{2\pi k_f\int_0^t m(\tau)d\tau}_{\text{相位 }\phi(t)}\right]$
2. 單音(single-tone)調變信號 $m(t)=A_m\cos(2\pi f_m t)$
3. Carson's rule(卡爾森規則)

【擬答】

㈠ $\beta=\dfrac{\Delta f}{f_m}=\dfrac{k_f A_m}{f_m}=\dfrac{50\times 1}{10}=5$

㈡ $s_{FM}(t)=A_c\cos\left(2\pi f_c t+\beta\sin(2\pi f_m t)\right)=\cos\left(2\pi 10^8 t+5\sin(20\pi t)\right)$

㈢對於單音調變的 FM 信號所需要的傳輸頻寬為

$B_T=2(\beta+1)f_m=2\times(5+1)\times 10=120\text{Hz}$

二、考慮一個平方律檢測器，其非線性特性為 $v_2(t)=a_1v_1(t)+a_2v_1^2(t)$，若 $v_1(t)=A_c[1+k_a m(t)]\,cos(2\pi f_c t)$。

㈠計算輸出 $v_2(t)=$ ？（10 分）

㈡找出能由 $v_2(t)$ 復原 $m(t)$的條件。（10 分）

1.《考題難易》★★★：普通
2.《破題關鍵》：平方律檢測器(Square-law Detector)

【擬答】

$$v_2(t)=a_1s(t)+a_2s^2(t)$$

$$=a_1A_c[1+k_am(t)]\cos(2\pi f_ct)+\frac{a_2A_c^2}{2}\left[1+2k_am(t)+k_a^2m^2(t)\right]$$

$$+\frac{a_2A_c^2}{2}\left[1+2k_am(t)+k_a^2m^2(t)\right]\cos(4\pi f_ct)$$

經過 LPF 後，剩下 $y(t)=\dfrac{a_2A_c^2}{2}\left[1+2k_am(t)+k_a^2m^2(t)\right]$

當 k_a 很小時，$y(t) \cong \frac{a_2 A_c^2}{2}[1+2k_a m(t)]$

再濾掉直流項即可還原原資訊訊號 $m(t)$。

$y_o(t) = a_2 A_c^2 k_a m(t)$

三、請算出滿足下列各信號之最小取樣速率：

㈠ $g(t) = sinc(500t)$（6 分）

㈡ $g(t) = sinc^2(200t)$（7 分）

㈢ $g(t) = sinc(500t) + sinc^2(200t)$（7 分）

1.《考題難易》★★★：普通

2.《破題關鍵》：取樣定理

若有限頻寬 $x(t)$ 之最高頻率為 f_m，將 $x(t)$ 以速率 f_s 等間隔取樣，則若 $f_s \geq 2f_m$，

$x(t)$ 可利用其離散之取樣值 $x(nT_s)$ 完全重建。其中 $f_s = 2f_m$ 稱為 ***Nyquist rate***

【擬答】

㈠ $g(t) = \sin c(500t) \Rightarrow G(f) = \frac{1}{500} rect\left(\frac{f}{500}\right) \Rightarrow f_{s,\min} = 2 \times 250 = 500\ {}^{samples}/_{\sec}$

㈡ $g(t) = \sin c^2(200t) \Rightarrow G(f) = \frac{1}{200} tri\left(\frac{f}{200}\right) \Rightarrow f_{s,\min} = 2 \times 200 = 400\ {}^{samples}/_{\sec}$

㈢ $g(t) = \sin c(500t) + \sin c^2(200t) \Rightarrow G(f) = \frac{1}{500} rect\left(\frac{f}{500}\right) + \frac{1}{200} tri\left(\frac{f}{200}\right) \Rightarrow f_{s,\min} = 500\ {}^{samples}/_{\sec}$

四、正交分頻多工（OFDM）技術為多項新型通訊系統所採用。

㈠假設一 OFDM 系統使用 64 個子載波，但只有 48 個子載波放資料，其他為導引信號或保護頻段，假設子載波的頻率間距為 312.5 kHz，每個資料子載波使用相同的 QPSK 調變與 1/2 的編碼率，且為了克服符際干擾（Inter-symbol Interference, ISI）使用了 OFDM 資料訊框長度的 1/4 時間當保護區間（Guard Interval, GI），請計算此 OFDM 系統的資料傳輸率為何？（10 分）

㈡若為了提升資料傳輸率，將調變改為 64 QAM，編碼率提升到 3/4，並用了 52 個子載波來傳送資料，且 GI 縮短為 OFDM 資料訊框長度的 1/8，且同時在接收與發射端各用兩根天線做獨立的收發（不考慮天線間的干擾），請問調整後之 OFDM 系統的資料傳輸率為何？（10 分）

1.《考題難易》困難：★★★★★

2.《破題關鍵》：QPSK，64 QAM 之**頻寬效益 (*Bandwidth efficiency*)**

編碼率(*code rate*)：訊息位元之長度與總位元數之比值，保護區間（Guard Interval, GI），OFDM

【擬答】

㈠ QPSK 之頻寬為 $B_T = \frac{2}{T_s} = R_b = 312.5K$

1/2 的編碼率，1/4 保護區間，並用了 48 個子載波故傳送速率為 $312.5K \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times 48 = 5625K$

㈡ 64 QAM 之頻寬為 $B_T=\frac{2}{T_s}=\frac{2}{6T_b}=\frac{R_b}{3}=312.5K\Rightarrow R_b=937.5K$

3/4 的編碼率，1/8 保護區間，並用了 52 個子載波，2×2 MIMO 故傳送速率為

$$937.5K\times\frac{7}{8}\times\frac{3}{4}\times52\times2=63{,}984.375K$$

五、假設一數位蜂巢式行動通訊系統之頻寬使用效率需達到 4 bits/second/Hz。

㈠請問其最低之 E_b/N_0 為何？（10 分）

㈡若要使系統之頻寬使用效率加倍，其傳送之功率需提升幾倍？（10 分）

1.《考題難易》★★★★：困難

2.《破題關鍵》：

消息容量定理(*Information Capacity theorem*)若接收之信號功率為 P(*Watts*)，通道之頻寬為 B (hertz)，AWGN 雜訊之 PSD 為 $\frac{N_0}{2}\left(Watts/hertz\right)$，則消息容量為 $C=B\log_2\left(1+\frac{P}{N_0B}\right)$ (in bits per second per Hz)

【擬答】

㈠ $C=B\log_2\left(1+\frac{P}{N_0B}\right)$ (in bits per second per Hz)

若系統之傳送速率為 $R_b\ bits/\sec$，E_b 為位元之能量，故有 $P=R_bE_b$，代入上式後可得

$$R\le C=B\log_2\left(1+\frac{E_b}{N_0}\frac{R_b}{B}\right)\quad\text{(a)}$$

其中 $\gamma \equiv \frac{R_b}{B}$ 為頻譜的使用效率代入(a)後可得 $\gamma \le \log_2\left(1+\frac{E_b}{N_0}\gamma\right)$ (b)

由(b) 可得 $\frac{E_b}{N_0} \ge \min\left\{\frac{E_b}{N_0}\right\} = \frac{2^\gamma - 1}{\gamma} = \frac{15}{4}$ (c)

㈡ if $\gamma = 8$ 且系統之頻寬不變，換言之系統之傳送速率為上一題之 2 倍，由(c)

$$\frac{E_b}{N_0} \ge \min\left\{\frac{E_b}{N_0}\right\} = \frac{2^\gamma - 1}{\gamma} = \frac{255}{8},$$

$$\frac{\frac{255}{8}}{\frac{15}{4}} = \frac{51}{6} = 8.5 \Rightarrow P_2 = 8.5 \times 2 \times P_1 = 17P_1$$