111 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學

吳迪老師 解題

甲、申論題部分：(50 分)

一、考慮一個雙變數函數如下所示：$f(x, y) = (x^2 + 2y)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$。令 P_0 代表 x−y 平面上的點(1,−1)（即 $P_0 = (1, -1)$）。

㈠請計算 f(x,y)在 P_0 的梯度（gradient）為何？（5 分）

㈡請計算 f(x,y)在 P_0 的上面沿著(1,0)的方向之方向導數（directional derivative）為何？（5 分）

1.《考題難易》：★
2.《解題關鍵》：考梯度及方向導數, 基本題
3.《命中特區》：吳迪著"統計學"P9-28 例 32

【擬答】：

㈠$\nabla f(1,-1) = (2xe^{-(x^2+y^2)} + (x^2+2y)e^{-(x^2+y^2)}(-2x),$
$2e^{-(x^2+y^2)} + (x^2+2y)e^{-(x^2+y^2)}(-2y)|_{(1,-1)}$
$= (4e^{-2}, 0)$

㈡$\nabla f(1,-1)\cdot\frac{(1,0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = (4e^{-2}, 0)\cdot(1,0)$
$= 4e^{-2}$

二、有一個微分方程式如下所示（僅考慮 x>0）：

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}\cdot y = x \text{, for } x>0$$

此外，初始條件如下所示：y(1)=3。

㈠此為一階線性微分方程（first-order linear differential equation），可以使用積分因子（integrating factor）求解。試求微分方程之積分因子。（5 分）

㈡請求解 y(x)。（5 分）

1.《考題難易》：★
2.《解題關鍵》：考一階線性微分方程, 基本題
3.《命中特區》：吳迪著"統計學"P1-23 例 23

【擬答】：

$y' + \frac{3}{x}y = x$

㈠積分因子$I(x) = e^{\int\frac{3}{x}dx} = e^{3lnx} = x^3$

㈡$yI(x) = \int\theta(x)I(x)dx + c$

$\Rightarrow yx^3 = \int x\cdot x^3dx + c = \frac{1}{5}x^5 + c$

$\Rightarrow y = \frac{1}{5}x^2 + cx^{-3}$

$y(1) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{1}{5} + c \Rightarrow c = \frac{14}{5}$

$$\therefore y=\frac{1}{5}x^{2}+\frac{14}{5}x^{-3}$$

三、有一個 3×3 的矩陣如下所示：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

已知此矩陣的特徵值（eigen-value）為 2、2（重根）、1。

㈠請寫出 A 矩陣的所有特徵向量（eigen-vector）的一般形式。（5 分）

㈡令 $B=A^{8}$。請寫出 B 矩陣的所有特徵向量的一般形式。（5 分）

***1.*《考題難易》：★**
***2.*《解題關鍵》：考特徵向量，基本題**
***3.*《命中特區》：吳迪著"統計學"P8-35,36**

【擬答】：

㈠

$$1.\ \ \lambda=2\Rightarrow\begin{bmatrix}-2 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\ x2\\ x3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x1\\ x2\\ x3\end{bmatrix}=K_1\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}+K_2\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$2.\ \ \lambda=1\Rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\ x2\\ x3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x1\\ x2\\ x3\end{bmatrix}=K_3\begin{bmatrix}2\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$$

㈡ $B=A^{8}$，則 B 與 A 的特徵向量相同

四、有一個半徑為 1 的圓形標靶，對著它亂射飛鏢，完全不瞄準，所以彈著點（亦即飛鏢在標靶上的落點）會是在某一個區域的機率大小，與標靶上的位置無關，只與該區域的面積大小成正比。若只考慮有射中標靶的飛鏢，直接忽略沒有射中標靶的飛鏢。令 X 代表彈著點到靶心（亦即標靶的正中心）的距離，是一個隨機變數（random variable），並定義另外一個隨機變數：Y≜X2，試問：

㈠令$f_X(X)$代表 X 的機率密度函數（probability density function），則$f_x(x)$=？（5 分）

㈡令$f_Y(X)$代表 Y 的機率密度函數，則$f_Y(X)$=？（5 分）

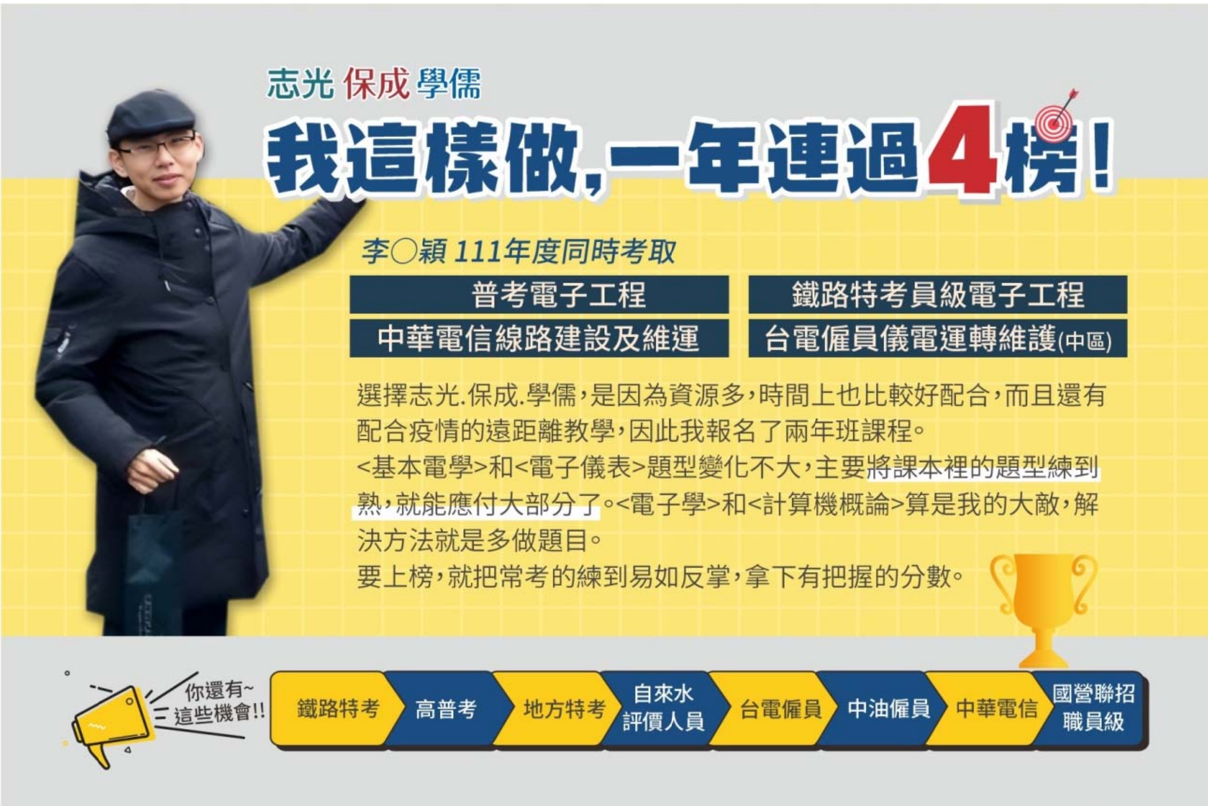
1.《考題難易》：★★
2.《解題關鍵》：考機率函數的變數轉換
3.《命中特區》：吳迪著"統計學"P7-50,51

【擬答】：

㈠$f_X(X)=\frac{2\pi X}{\pi\times 1^2}=2X, 0<X<1$

㈡$Y=X^2 \Rightarrow X=y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow J=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$\Longrightarrow f_Y(y)=2\sqrt{y}|J|=2\sqrt{y}\times\frac{1}{2\sqrt{y}}=1, 0<y<1$$



五、有一個複變函數$f(z)=\frac{1}{Z^2+4}$，欲對其作曲線積分（contour integration），請回答下列問題：

㈠考慮如下所示的曲線：C_1：|z|=3（即以複數平面原點為中心、半徑為 3 的圓），從 $z=3+0\cdot i$（$i=\sqrt{-1}$）逆時針旋轉繞一圈回到原出發點。試問$\oint_{C_1} f(z)dz=$？（5 分）

㈡考慮如下所示的曲線：C_2：|z − i|=2（即以 0+1·i 為中心、半徑為 2 的圓），從$Z=0+(-1)\cdot i$（$i=\sqrt{-1}$）逆時針旋轉繞一圈回到原出發點。試問$\oint_{C_2} f(z)dz=$？（5 分）

1.《考題難易》：★★
2.《解題關鍵》：考留數定理,常考題
3.《命中特區》：吳迪著"統計學"P10-47,48

【擬答】：

(一) $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$

$z=\pm 2i$ 為單極點，且在 C_1 內

1. $\underset{z=2i}{Res}\{f(z)\}=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{4i}$

2. $\underset{z=-2i}{Res}\{f(z)\}=\lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{-4i}$

$$\Rightarrow \oint_{c1} f(z)dz=2\pi i\left[\frac{1}{4i}+\frac{1}{-4i}\right]=0$$

(二) $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$

z=2i 為單極點，且在 C_2 內

$$\Rightarrow \oint_{c2} f(z)dz=2\pi i\times\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{2}$$

乙、測驗題部分：(50 分)

(B) 1. 我們準備對（1,–1,3）以及（2,0,–4）這兩個向量做外積（cross product）。如果將答案寫成（1, –1,3）×（2,0, –4）＝（a,b,c），那麼 a×b×c＝？

(A) 30　(B) 80　(C) 100　(D) 150

(C) 2. 考慮一線性方程組 Ax =b，A 為 m×n 矩陣，m＞n。下列敘述何者錯誤？

(A)該方程組可能無解

(B)該方程組可能只有一解

(C)該方程組不可能有無窮多解

(D)矩陣 A 的列階梯形矩陣（row echelon form）一定有「零」列（row of all zeros）

(A) 3. 如果用φ來代表（1,3,2）與（0,–1,4）這兩個向量之夾角，那麼 $\sin^2\phi$=？請選出最接近的數值：

(A) 0.9　(B) 0.7　(C) 0.5　(D) 0.3

(C) 4. 假設我們已知（1,2,3）、（1,0,–1）以及（3,1, α）這三個向量無法構成 $\Re^3\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\Re\}$ 的基底（basis）。那麼，α＝？

(A) $-\frac{1}{2}$　(B) $-\frac{1}{3}$　(C) -1　(D) $\frac{1}{2}$

(A) 5. 考慮如下所示之矩陣：$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$。下列敘述何者正確？
(A) A 為可逆（invertible）的矩陣
(B) A 為既約列梯形（reduced row echelon form）的矩陣
(C) A 為單位矩陣（identity matrix）
(D) A 為對稱（symmetric）的矩陣

(D) 6. 如下所示之選項中，何者為矩陣$\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}$的特徵向量（characteristic vector，亦稱 eigenvector）？
（選項中的符號$[\cdots]^T$代表矩陣轉置（transpose）的動作。提示：建議你直接套用特徵向量的定義下去做檢測）
(A)$[0\,1\,1]^T$　(B)$[1\,0\,1]^T$　(C)$[0\,0\,1]^T$　(D)$[-1\,0\,1]^T$

(C) 7. 考慮一馬可夫過程（ Markov process ）：$x(k+1)=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.2 & 0.7\end{bmatrix}x(k)$，其狀態向量 x 之初值$x(0)=[100\quad 0]^T$。請問$\lim_{x\to\infty} x(k)$為何？
(A)$[80\quad 20]^T$　(B)$[30\quad 70]^T$　(C)$[60\quad 40]^T$　(D)$[50\quad 50]^T$

(D) 8. 在下列四個選項所顯示的複變函數（complex function），其中有三個是可解析的（analytic，亦稱 differentiable（可微分的）），有一個是不可解析的（not analytic）。請指出那一個是不可解析的？
(A) e^z　(B) z^3　(C) z　(D) $\bar{z}$ （z 的共軛複數）

(C) 9. 考慮如下所示之複變函數：
$f(z)=\frac{6+i}{z^3}+\frac{-7}{z^2}+\frac{5+2i}{z}+1-2z+(5-i)\cdot z^3+z^3(i=\sqrt{-1})$。如果我們將該函數在 z = 0（亦即複數平面上的原點）的留數（residue）寫成 a + b・i 的形式，那麼 a + b=？
(A)−2　(B) 0　(C) 3　(D)2π

(B) 10. 在本題中我們考慮複變函數的線積分（line integral）。首先我們知道複數平面上的點可以寫成$z=x+i\cdot y$（$i=\sqrt{-1}$）的形式，接著我們用 Γ 代表 $y = x^2$ 這條曲線，而且其起點為(x, y) = (0, 0)、終點為(x, y) = (1,1)。請計算$\int_\Gamma z^2 dz$並且將結果寫成$a+b\cdot i$的形式，此時 a・b 的數值與下列選項何者最為接近？
(A)−5　(B)−1　(C) 1　(D) 5

(A) 11. 令$g(z)=\int_C \frac{s^2-s+2}{(s-z)^2}ds$，其中路徑積分之路徑 C 為以$\pm 2,\pm 2i$為頂點之正方形的邊界，行經方向為正。請問 $g(1)$之值為何？
(A)$2\pi i$　(B) 1　(C) 0　(D)$4\pi i$

(C) 12. 有一個雙變數函數$f(x,y)=x^2\cdot\sin(x\cdot y)$。請問 f(x,y)在（1, π）的梯度（gradient）為何？
(A)（1, π）　(B)（π,1）　(C)（−π, −1）　(D)（1, −π）

(D) 13. 考慮微分方程式：$\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+y(t)=\sin\omega t, t\ge 0$，其中$\ddot{y}$與$\dot{y}$分別代表 y 對變數 t 做一次與二次微分。請問下列敘述何者正確？
(A)對於某些$(\dot{y}(0), y(0))$初值，方程式的解會收斂到零
(B)對於任何非零之$(\dot{y}(0), y(0))$初值，方程式的解是一個頻率為ω之週期函數
(C)對於任何非零之$(\dot{y}(0), y(0))$初值，方程式的解之震幅不會隨輸入函數之頻率ω產生變化
(D)對於任何非零之$(\dot{y}(0), y(0))$初值，方程式的解會隨時間之增大而收斂到一個週期函數

(B) 14. 考慮一個初始值問題(initial-value problem)—微分方程:
$y''(x)+x\cdot y'(x)+e^x\cdot y(x)=x^2+1$,初始條件:$y(0)=2$、$y'(0)=-1$。如果我們將本問題的解答 y(x)寫成冪級數(power series)的形式:$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$
,那麼,$a_2=$?(提示:可以嘗試用泰勒級數(Taylor series)的形式去做思考,直接將 a_2 與 $y''(0)$ 做連結)

(A)-1 (B)$-\frac{1}{2}$ (C) 0 (D)$\frac{1}{2}$

(C) 15. 下列關於拉普拉斯轉換(Laplace transformation)$L(f):=\int_0^{\infty}f(t)_e^{-st}dt$之敘述,何者錯誤?

(A)L(f+g)=L(f)+L(g)
(B)$L^{-1}(f+g)=L^{-1}(f)+L\text{-}^{1}(g)$,其中 L^{-1} 為 L 之逆轉換
(C)L(fg)=L(f)L(g)
(D)$L(f')=s\cdot L(f)$,其中 f'為 f 之導函數,且 $f(0)=0$

(A) 16. 考慮以下函數: $f(t)=1$,當$0\le t\le 2$; $f(t)=0$,當$t\le 0$或$t\ge 2$。下列敘述何者正確?
(A)函數 $f(t)$之傅立葉轉換(Fourier transform)為$F(\omega)=2e^{-j\omega}\sin(\omega)/\omega$
(B)函數$g(t):=f(t+1)$之傅立葉轉換(Fourier transform)為$G(\omega)=\cos(\omega)/\omega$
(C)函數$h(t):=\cos(\omega_0 t)f(t)$之傅立葉轉換(Fourier transform)為
$H(\omega)=2\sin(\omega-\omega_0)/(\omega-\omega_0)$
(D)函數$m(t):=f(-t)$之傅立葉轉換(Fourier transform)為$M(\omega)=-\sin(\omega)/\omega$

(C) 17. 考慮一隨機變數 x,其機率密度分布函數具有下列形式:$f(x)=1-|x|,|x|\le 1$,且
$f(x)=0,|x|>1$。請問 x 之變異數(variance)為何?

(A)$1/\sqrt{6}$ (B) $2/3$ (C)$1/6$ (D)$\sqrt{2/3}$

(B) 18. 有兩個連續的隨機變數 X 與 Y,它們的合併機率密度函數(joint probability density function)為:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}A\cdot x\cdot y^2, \text{if } 0<x<1 \text{ and } 0<y<1\\ 0, \quad\quad \text{otherwise}\end{cases}$$

其中 A 為常數。請問隨機變數 X 的期望值(expectation)為下列何者?

(A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{2}{3}$ (C)$\frac{3}{4}$ (D)$\frac{4}{5}$

(C) 19. 假設我們有一個不公平(unfair)的銅板,在每次投擲中出現正面的機率為 0.4,出現反面的機率為 0.6。如果我們丟擲這個銅板 5 次,結果出現正面比出現反面還更多次的機率為何?(請在下列選項中選出最接近答案的數值。)

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

(D) 20. 請問 i^{2i} 的主值(principal value)為何?

(A) 0 (B)$-i$ (C)$e^{i\pi}$ (D)$e^{-\pi}$