

111 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試
類 科：電力工程、電子工程
科 目：工程數學

吳迪老師 解題

甲、申論題部分：(50 分)

一、考慮一個雙變數函數如下所示： $f(x, y) = (x^2 + 2y) \cdot e^{-(x^2 + y^2)}$ 。令 P_0 代表 x - y 平面上的點 $(1, -1)$ (即 $P_0 = (1, -1)$)。

(一)請計算 $f(x, y)$ 在 P_0 的梯度 (gradient) 為何？(5 分)

(二)請計算 $f(x, y)$ 在 P_0 的上面沿著 $(1, 0)$ 的方向之方向導數 (directional derivative) 為何？(5 分)

- | |
|---|
| <p>1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：考梯度及方向導數, 基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”統計學”P9-28 例 32</p> |
|---|

【擬答】：

$$\begin{aligned} \text{(一)} \nabla f(1, -1) &= (2xe^{-(x^2+y^2)} + (x^2 + 2y)e^{-(x^2+y^2)}(-2x), \\ &\quad 2e^{-(x^2+y^2)} + (x^2 + 2y)e^{-(x^2+y^2)}(-2y))|_{(1,-1)} \\ &= (4e^{-2}, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(二)} \nabla f(1, -1) \cdot \frac{(1, 0)}{\sqrt{1^2 + 0^2}} &= (4e^{-2}, 0) \cdot (1, 0) \\ &= 4e^{-2} \end{aligned}$$

二、有一個微分方程式如下所示 (僅考慮 $x > 0$)：

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x} \cdot y = x, \text{ for } x > 0$$

此外，初始條件如下所示： $y(1)=3$ 。

(一)此為一階線性微分方程 (first-order linear differential equation)，可以使用積分因子 (integrating factor) 求解。試求微分方程之積分因子。(5 分)

(二)請求解 $y(x)$ 。(5 分)

- | |
|--|
| <p>1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：考一階線性微分方程, 基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”統計學”P1-23 例 23</p> |
|--|

【擬答】：

$$y' + \frac{3}{x}y = x$$

$$\text{(一)} \text{積分因子 } I(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = x^3$$

$$\text{(二)} yI(x) = \int \theta(x)I(x)dx + c$$

$$\Rightarrow yx^3 = \int x \cdot x^3 dx + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{5}x^2 + cx^{-3}$$

$$y(1) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{1}{5} + c \Rightarrow c = \frac{14}{5}$$

$$\therefore y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{14}{5}x^{-3}$$

三、有一個 3×3 的矩陣如下所示：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

已知此矩陣的特徵值 (eigen-value) 為 2、2 (重根)、1。

(一)請寫出 A 矩陣的所有特徵向量 (eigen-vector) 的一般形式。(5 分)

(二)令 $B=A^8$ 。請寫出 B 矩陣的所有特徵向量的一般形式。(5 分)

1. 《考題難易》：★

2. 《解題關鍵》：考特徵向量，基本題

3. 《命中特區》：吳迪著”統計學”P8-35,36

【擬答】：

(一)

$$1. \lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = K_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(二) $B=A^8$ ，則 B 與 A 的特徵向量相同

四、有一個半徑為 1 的圓形標靶，對著它亂射飛鏢，完全不瞄準，所以彈著點（亦即飛鏢在標靶上的落點）會是在某一個區域的機率大小，與標靶上的位置無關，只與該區域的面積大小成正比。若只考慮有射中標靶的飛鏢，直接忽略沒有射中標靶的飛鏢。令 X 代表彈著點到靶心（亦即標靶的正中心）的距離，是一個隨機變數 (random variable)，並定義另外一個隨機變數： $Y \triangleq X^2$ ，試問：

(一)令 $f_X(X)$ 代表 X 的機率密度函數 (probability density function)，則 $f_X(x)=?$ (5 分)

(二)令 $f_Y(X)$ 代表 Y 的機率密度函數，則 $f_Y(X)=?$ (5 分)

1. 《考題難易》：★★

2. 《解題關鍵》：考機率函數的變數轉換

3. 《命中特區》：吳迪著”統計學”P7-50,51

【擬答】：

$$(一) f_X(X) = \frac{2\pi X}{\pi \times 1^2} = 2X, 0 < X < 1$$

$$(二) Y = X^2 \Rightarrow X = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow J = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = 2\sqrt{y}|J| = 2\sqrt{y} \times \frac{1}{2\sqrt{y}} = 1, 0 < y < 1$$

志光 保成 學儒

我這樣做,一年連過4榜!

李○穎 111年度同時考取

普考電子工程	鐵路特考員級電子工程
中華電信線路建設及維運	台電僱員儀電運轉維護(中區)

選擇志光.保成.學儒,是因為資源多,時間上也比較好配合,而且還有配合疫情的遠距離教學,因此我報名了兩年班課程。
 <基本電學>和<電子儀表>題型變化不大,主要將課本裡的題型練到熟,就能應付大部分了。<電子學>和<計算機概論>算是我的大敵,解決方法就是多做題目。
 要上榜,就把常考的練到易如反掌,拿下有把握的分數。

你還有~這些機會!!

鐵路特考 高普考 地方特考 自來水評價人員 台電僱員 中油僱員 中華電信 國營聯招職員級

五、有一個複變函數 $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ ，欲對其作曲線積分（contour integration），請回答下列問題：

(一)考慮如下所示的曲線： $C_1: |z|=3$ （即以複數平面原點為中心、半徑為3的圓），從 $z = 3 + 0 \cdot i$ ($i = \sqrt{-1}$) 逆時針旋轉繞一圈回到原出發點。試問 $\oint_{C_1} f(z) dz = ?$ (5 分)

(二)考慮如下所示的曲線： $C_2: |z - i|=2$ （即以 $0+1 \cdot i$ 為中心、半徑為2的圓），從 $Z = 0 + (-1) \cdot i$ ($i = \sqrt{-1}$) 逆時針旋轉繞一圈回到原出發點。試問 $\oint_{C_2} f(z) dz = ?$ (5 分)

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考留數定理,常考題
3. 《命中特區》：吳迪著”統計學”P10-47,48

【擬答】：

$$(一) f(z) = \frac{1}{z^2+4}$$

$z = \pm 2i$ 為單極點，且在 C_1 內

$$1. \operatorname{Res}_{z=2i}\{f(z)\} = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{4i}$$

$$2. \operatorname{Res}_{z=-2i}\{f(z)\} = \lim_{z \rightarrow -2i} (z + 2i) \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{-4i}$$

$$\Rightarrow \oint_{C_1} f(z) dz = 2\pi i \left[\frac{1}{4i} + \frac{1}{-4i} \right] = 0$$

$$(二) f(z) = \frac{1}{z^2+4}$$

$z=2i$ 為單極點，且在 C_2 內

$$\Rightarrow \oint_{C_2} f(z) dz = 2\pi i \times \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

志光保成學儒 機械工程 | 電子工程 | 電力工程 | 資訊處理

一起站上工科勝利頂點

👑 考取菁英 強勢佔榜 👑

狀元	榜眼	探花
【全國狀元】111高 考電子工程-洪○銓	【全國榜眼】111普 考資訊處理-羅○昌	【全國榜眼】111普 考電力工程-陳○璋
【竹苗區狀元】110地特四等電子工程-詹○凱	【高雄市榜眼】110地特三等電力工程-江○展	【全國第八】111普考電子工程-李○穎
【台北市狀元】110地特四等資訊處理-于 ○	【高雄市榜眼】110地特四等電子工程-曾○富	【全國第九】111普考機械工程-施○佑
【台中市狀元】110地特四等電力工程-柯○訓	【台北市探花】110地特三等電力工程-黃○任	
【金門縣狀元】110地特四等資訊處理-吳○展	【台北市探花】110地特五等電子工程-柯○輝	
【花東區第四】110地特三等資訊處理-羅○哲	【全國第七】111普 考電子工程-卓○倫	
【桃園市第四】110地特三等資訊處理-丁○妮	【全國第七】111初 考電子工程-柯○輝	
【高雄市第四】110地特四等電力工程-盧○源	【桃園市第七】110地特三等電力工程-張○培	
【高雄市第六】110地特四等電力工程-蘇○禎	【全國第八】111高 考機械工程-江○禾	

👑 單一年度優秀考取 👑

高資資訊處理 賴○全; 高資資訊處理 郭○楷; 普考資訊處理 劉○廷; 普考資訊處理 賴○全; 高考電力工程 吳○顯; 高考電力工程 曾○倫; 高考電子工程 王○楷
 高資資訊處理 黃○迪; 高資資訊處理 廖○仲; 普考資訊處理 張○偉; 普考資訊處理 張○慧; 高考電力工程 鄧○駿; 高考電力工程 吳○璿; 高考電子工程 莊○雪
 高資資訊處理 張○偉; 高資資訊處理 羅○昌; 普考資訊處理 褚○華; 普考資訊處理 劉○銘; 高考電力工程 葛○宇; 高考電力工程 蔡○昇; 普考電子工程 馮○恩
 高資資訊處理 郭○哲; 高資資訊處理 劉○廷; 普考資訊處理 李○庭; 普考資訊處理 陳○堂; 高考電力工程 陳○璿; 普考電力工程 吳○璿; 普考電子工程 蔣○霖
 高資資訊處理 胡○紘; 高資資訊處理 李○庭; 普考資訊處理 陳○明; 普考資訊處理 廖○仲; 高考電力工程 王○甯; 普考電力工程 吳○哲; 高考機械工程 黃○榮
 高資資訊處理 許○傑; 高資資訊處理 曾○瑄; 普考資訊處理 鄭○然; 高考電力工程 蔡○鎮; 高考電力工程 梁○豐; 普考電力工程 梁○豐; 普考機械工程 江○禾
 高資資訊處理 陳○廷; 高資資訊處理 于 ○; 普考資訊處理 吳○翰; 高考電力工程 李○源; 高考電力工程 席○棠; 高考電子工程 卓○倫; 普考機械工程 金○璋
 高資資訊處理 陳○明; 普考資訊處理 黃○迪; 普考資訊處理 曾○瑄; 高考電力工程 丁○翔; 高考電力工程 吳○哲;

版面有限 無法一一刊登

乙、測驗題部分：(50 分)

- (B) 1. 我們準備對 $(1, -1, 3)$ 以及 $(2, 0, -4)$ 這兩個向量做外積 (cross product)。如果將答案寫成 $(1, -1, 3) \times (2, 0, -4) = (a, b, c)$ ，那麼 $a \times b \times c = ?$
- (A) 30 (B) 80 (C) 100 (D) 150
- (C) 2. 考慮一線性方程組 $Ax = b$ ， A 為 $m \times n$ 矩陣， $m > n$ 。下列敘述何者錯誤？
- (A) 該方程組可能無解
(B) 該方程組可能只有一解
(C) 該方程組不可能有無窮多解
(D) 矩陣 A 的列階梯形矩陣 (row echelon form) 一定有「零」列 (row of all zeros)
- (A) 3. 如果用 ϕ 來代表 $(1, 3, 2)$ 與 $(0, -1, 4)$ 這兩個向量之夾角，那麼 $\sin^2 \phi = ?$ 請選出最接近的數值：
- (A) 0.9 (B) 0.7 (C) 0.5 (D) 0.3
- (C) 4. 假設我們已知 $(1, 2, 3)$ 、 $(1, 0, -1)$ 以及 $(3, 1, \alpha)$ 這三個向量無法構成 $\mathcal{R}^3 \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathcal{R}\}$ 的基底 (basis)。那麼， $\alpha = ?$
- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) -1 (D) $\frac{1}{2}$
- (A) 5. 考慮如下所示之矩陣： $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 。下列敘述何者正確？
- (A) A 為可逆 (invertible) 的矩陣
(B) A 為既約列梯形 (reduced row echelon form) 的矩陣
(C) A 為單位矩陣 (identity matrix)
(D) A 為對稱 (symmetric) 的矩陣
- (D) 6. 如下所示之選項中，何者為矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ 的特徵向量 (characteristic vector，亦稱 eigenvector)？
- (選項中的符號 $[\dots]^T$ 代表矩陣轉置 (transpose) 的動作。提示：建議你直接套用特徵向量的定義下去做檢測)
- (A) $[0 \ 1 \ 1]^T$ (B) $[1 \ 0 \ 1]^T$ (C) $[0 \ 0 \ 1]^T$ (D) $[-1 \ 0 \ 1]^T$

- (C) 7. 考慮一馬可夫過程 (Markov process) : $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} x(k)$, 其狀態向量 x 之初始值 $x(0) = [100 \ 0]^T$ 。請問 $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k)$ 為何?
- (A) $[80 \ 20]^T$ (B) $[30 \ 70]^T$ (C) $[60 \ 40]^T$ (D) $[50 \ 50]^T$
- (D) 8. 在下列四個選項所顯示的複變函數 (complex function), 其中有三個是可解析的 (analytic, 亦稱 differentiable (可微分的)), 有一個是不可解析的 (not analytic)。請指出那一個是不可解析的?
- (A) e^z (B) z^3 (C) z (D) $\bar{z}$ (z 的共軛複數)
- (C) 9. 考慮如下所示之複變函數:
- $$f(z) = \frac{6+i}{z^3} + \frac{-7}{z^2} + \frac{5+2i}{z} + 1 - 2z + (5-i) \cdot z^3 + z^3 (i = \sqrt{-1})$$
- 如果我們將該函數在 $z = 0$ (亦即複數平面上的原點) 的留數 (residue) 寫成 $a + b \cdot i$ 的形式, 那麼 $a + b = ?$
- (A) -2 (B) 0 (C) 3 (D) 2π
- (B) 10. 在本題中我們考慮複變函數的線積分 (line integral)。首先我們知道複數平面上的點可以寫成 $z = x + i \cdot y$ ($i = \sqrt{-1}$) 的形式, 接著我們用 Γ 代表 $y = x^2$ 這條曲線, 而且其起點為 $(x, y) = (0, 0)$ 、終點為 $(x, y) = (1, 1)$ 。請計算 $\int_{\Gamma} z^2 dz$ 並且將結果寫成 $a + b \cdot i$ 的形式, 此時 $a \cdot b$ 的數值與下列選項何者最為接近?
- (A) -5 (B) -1 (C) 1 (D) 5
- (A) 11. 令 $g(z) = \int_C \frac{s^2 - s + 2}{(s - z)^2} ds$, 其中路徑積分之路徑 C 為以 $\pm 2, \pm 2i$ 為頂點之正方形的邊界, 行經方向為正。請問 $g(1)$ 之值為何?
- (A) $2\pi i$ (B) 1 (C) 0 (D) $4\pi i$
- (C) 12. 有一個雙變數函數 $f(x, y) = x^2 \cdot \sin(x \cdot y)$ 。請問 $f(x, y)$ 在 $(1, \pi)$ 的梯度 (gradient) 為何?
- (A) $(1, \pi)$ (B) $(\pi, 1)$ (C) $(-\pi, -1)$ (D) $(1, -\pi)$
- (D) 13. 考慮微分方程式: $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = \sin \omega t, t \geq 0$, 其中 $\ddot{y}$ 與 $\dot{y}$ 分別代表 y 對變數 t 做一次與二次微分。請問下列敘述何者正確?
- (A) 對於某些 $(\dot{y}(0), y(0))$ 初值, 方程式的解會收斂到零
- (B) 對於任何非零之 $(\dot{y}(0), y(0))$ 初值, 方程式的解是一個頻率為 ω 之週期函數
- (C) 對於任何非零之 $(\dot{y}(0), y(0))$ 初值, 方程式的解之震幅不會隨輸入函數之頻率 ω 產生變化
- (D) 對於任何非零之 $(\dot{y}(0), y(0))$ 初值, 方程式的解會隨時間之增大而收斂到一個週期函數
- (B) 14. 考慮一個初始值問題 (initial-value problem) — 微分方程:
- $$y''(x) + x \cdot y'(x) + e^x \cdot y(x) = x^2 + 1$$
- 初始條件: $y(0) = 2, y'(0) = -1$ 。如果我們將本問題的解答 $y(x)$ 寫成冪級數 (power series) 的形式: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, 那麼, $a_2 = ?$ (提示: 可以嘗試用泰勒級數 (Taylor series) 的形式去做思考, 直接將 a_2 與 $y''(0)$ 做連結)
- (A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$
- (C) 15. 下列關於拉普拉斯轉換 (Laplace transformation) $L(f) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ 之敘述, 何者錯誤?
- (A) $L(f+g) = L(f) + L(g)$
- (B) $L^{-1}(f+g) = L^{-1}(f) + L^{-1}(g)$, 其中 L^{-1} 為 L 之逆轉換
- (C) $L(fg) = L(f)L(g)$
- (D) $L(f') = s \cdot L(f)$, 其中 f' 為 f 之導函數, 且 $f(0) = 0$

公職王歷屆試題 (111 地方特考)

- (A) 16. 考慮以下函數： $f(t) = 1$ ，當 $0 \leq t \leq 2$ ； $f(t) = 0$ ，當 $t \leq 0$ 或 $t \geq 2$ 。下列敘述何者正確？
(A) 函數 $f(t)$ 之傅立葉轉換 (Fourier transform) 為 $F(\omega) = 2e^{-j\omega} \sin(\omega) / \omega$
(B) 函數 $g(t) := f(t+1)$ 之傅立葉轉換 (Fourier transform) 為 $G(\omega) = \cos(\omega) / \omega$
(C) 函數 $h(t) := \cos(\omega_0 t) f(t)$ 之傅立葉轉換 (Fourier transform) 為 $H(\omega) = 2 \sin(\omega - \omega_0) / (\omega - \omega_0)$
(D) 函數 $m(t) := f(-t)$ 之傅立葉轉換 (Fourier transform) 為 $M(\omega) = -\sin(\omega) / \omega$
- (C) 17. 考慮一隨機變數 x ，其機率密度分布函數具有下列形式： $f(x) = 1 - |x|, |x| \leq 1$ ，且 $f(x) = 0, |x| > 1$ 。請問 x 之變異數 (variance) 為何？
(A) $1/\sqrt{6}$ (B) $2/3$ (C) $1/6$ (D) $\sqrt{2/3}$
- (B) 18. 有兩個連續的隨機變數 X 與 Y ，它們的合併機率密度函數 (joint probability density function) 為：
$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} A \cdot x \cdot y^2, & \text{if } 0 < x < 1 \text{ and } 0 < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
其中 A 為常數。請問隨機變數 X 的期望值 (expectation) 為下列何者？
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$
- (C) 19. 假設我們有一個不公平 (unfair) 的銅板，在每次投擲中出現正面的機率為 0.4，出現反面的機率為 0.6。如果我們丟擲這個銅板 5 次，結果出現正面比出現反面還更多次的機率為何？(請在下列選項中選出最接近答案的數值。)
(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4
- (D) 20. 請問 i^{2i} 的主值 (principal value) 為何？
(A) 0 (B) $-i$ (C) $e^{i\pi}$ (D) $e^{-\pi}$