

112年特種考試交通事業鐵路人員

考試別：鐵路人員考試
等 別：高員三級考試
類科組：電力工程
科 目：工程數學

吳迪 老師解題

甲、申論題部分：(50 分)

一、求微分方程式 (Differential Equations)： $\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 9y(x) = 9xe^{-3x}$ 之通解 (general solution)。
(15 分)

- | |
|---|
| 1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考二階常微分方程式, 常考題
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P2-16~P2-18 |
|---|

【擬答】：

(一)

$$y'' - 9y = 9xe^{-3x}$$

(1) 先求 y_h

$$y'' - 9y = 0$$

令 $y = e^{\lambda x}$ 代入, 得特徵方程式

$$\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -3 \text{ 或 } 3$$

$$y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$$

(2) 再求 y_p

$$y_p = \frac{1}{(D+3)(D-3)} 9xe^{-3x}$$

$$= \frac{1}{D-3} \left(\frac{3}{2} xe^{-3x} \right) - \frac{1}{D+3} \left(\frac{3}{2} xe^{-3x} \right)$$

$$= \frac{3}{2} xe^{-3x} \frac{1}{D-6} (x) - \frac{3}{2} xe^{-3x} \frac{1}{D} (x)$$

$$= -\frac{1}{4} xe^{-3x} - \frac{1}{24} e^{-3x} - \frac{3}{4} x^2 e^{-3x}$$

$$\therefore y = y_h + y_p = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{4} xe^{-3x} - \frac{3}{4} x^2 e^{-3x}$$

二、矩陣 (matrix) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ ：(每小題 5 分，共 15 分)

(一) 求矩陣 (matrix) A 之特徵值 (eigenvalues) 與特徵向量 (eigenvectors)。

(二) 求矩陣函數 e^{At}

(三) 求系統方程式 (system equations) $\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + 2x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -3x_2(t) \end{cases}$ 之通解 (general solution)。

- | |
|--|
| 1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考矩陣及其應用, 常考題 |
|--|

【擬答】：

(一)

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, -3$$

$$(1) \lambda = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \lambda = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(二) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow At = \begin{bmatrix} -t & 2t \\ 0 & -3t \end{bmatrix}$$

$$\det(At - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -t-\lambda & 2t \\ 0 & -3t-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + t)(\lambda + 3t) = 0 \Rightarrow \lambda = -t, -3t$$

$$(1) \lambda = -t \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2t \\ 0 & -2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \lambda = -3t \Rightarrow \begin{bmatrix} 2t & 2t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}(At)P = D = \begin{bmatrix} -t & 0 \\ 0 & -3t \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow At = PDP^{-1} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$(三) \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \text{由(一)得}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

三、擲四枚硬幣 (Flip four coins)，試驗結果有 16 種結果 (outcomes)： $o_1, o_2, \dots, o_{16}$ ，其中 $o_1 = HHHH, o_2 = HTHH, \dots, o_{16} = TTTT$ ；若定義隨機變數 (random variable) X 為： $X(o_j)$ = 出現背面 (T) 的硬幣數目，例如： $X(o_1) = 0, X(o_2) = 1$ ； P 為隨機變數 X 之機率分布 (probability distribution)，例如： $P(0) = 1/16, P(1) = 4/16$ 。(每小題 5 分。共 10 分)

(一)求此隨機變數 X 之均值 (mean) 或期望值 (expected value)： μ_X 。

(二)求此隨機變數 X 之標準差 (standard deviation) 或變異數的開根號 (square root of the variance)： σ_X 。

1. 《考題難易》：★★

2. 《解題關鍵》：考機率論，基本題

3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P7-38

【擬答】：

$$X \sim b(n = 4, p = \frac{1}{2})$$

$$(1) \mu_x = E(X) = np = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$(2) \sigma_x^2 = Var(X) = npq = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \sigma_x = 1$$

四、複數函數 $f(z) = \frac{ze^z}{(z-1)(z+1)}$ ：(每小題 5 分。共 10 分)

(一) 求 $f(z)$ 在 $z=1$ 與 $z=-1$ 的留數 (residue)。

(二) 閉合曲線 (closed curve) C 為圓 $|z| = 2$ ；利用柯西 (Cauchy) 留數定理 (Residue Theorem)

求複數線積分 $\oint_C \frac{ze^z}{(z-1)(z+1)} dz$ 。

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考留數定理, 常考題
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P10-47

【擬答】：

$$(一) f(z) = \frac{ze^z}{(z-1)(z+1)} \Rightarrow z = 1, -1 \text{ 為單極點}$$

$$(1) \text{Res}_{z=1} \{f(z)\} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{ze^z}{(z-1)(z+1)} = \frac{e}{2}$$

$$(2) \text{Res}_{z=-1} \{f(z)\} = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{ze^z}{(z-1)(z+1)} = \frac{e^{-1}}{2}$$

(二) $z = 1, -1$ 在 C 中

$$\Rightarrow \oint_C \frac{ze^z}{(z-1)(z+1)} dz = 2\pi i \left(\frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right)$$

選擇 **志光學儒保成**

是你通往**上榜**最快的捷徑

你還可以考這些考試

- ✓ 初等考
- ✓ 鐵路營運人員
- ✓ 國營聯招職員
- ✓ 中油僱員
- ✓ 台電僱員
- ✓ 台菸酒評價人員
- ✓ 台水評價人員

- (D) 1. 某能量場可用函數 $\phi(x, y, z) = 0.5(x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2)$ 表示。該能量場在點 $P(-1, 0, 1)$ 的最大變化率(rate of change)為何?
 (A) $-\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$
- (B) 2. 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$, 則下列選項中何者為矩陣 A 的秩數(Rank)?
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
- (C) 3. 考慮聯立方程組 $Ax=0$, 其中 $A \in R^{8 \times 10}$ 。若舞坊盛組的通解含有 6 個任意常數, 則 A 的值域空間(Range space)維度(dimension)為何?
 (A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 3
- (C) 4. 給定兩向 $u = [1 \ 1 \ 2]^T$ 及 $v = [2 \ -1 \ 1]^T$, 下列選項何者錯誤?
 (A) 此兩向量的範數(norm)乘積為 6
 (B) 此兩向量的內積(inner product)為 3
 (C) 此兩向量的外積(cross product)為 $[-3 \ -3 \ -3]^T$
 (D) 此兩向量的夾角為 $\frac{\pi}{3}$
- (A) 5. T 為 R^2 到 R^3 的線性轉換, 且滿足 $T(u + 4v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(2u + 3v) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 。則 $T(u) = ?$
 (A) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 12 \end{bmatrix}$ (B) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 12 \end{bmatrix}$
- (D) 6. 若 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 存在可逆矩陣 P 可將其對角化 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。則 P 的第一行行向量為何?
 (A) $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- (D) 7. 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 則 A^2 的特徵值(eigenvalues)不是下列那一個選項?
 (A) 9 (B) 1 (C) 16 (D) 4
- (B) 8. 下列矩陣何者是不可被「對角線化(diagonalizable)」?
 (A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- (D) 9. 考慮微分方程式 $\frac{dy}{dx} = a(x)b(y)$, $a(x)b(y) \neq 0$ 。若呈上積分因子 $\mu(x, y)$ 後可將此方程式轉換成正合(exact)微分方程式, 則 μ 為下列何者?
 (A) $\mu = a(x)$ (B) $\mu = \frac{1}{a(x)}$ (C) $\mu = -b(y)$ (D) $\mu = \frac{1}{b(y)}$

- (A) 10. 考慮微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + \cos(x) \frac{dy}{dx} + \sin(x)y = 1 - x^3, y(0) = 1, \frac{dy}{dx}(0) = 0$ 。若此方程式的級數解可表示為 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ，則 c_3 為何？
- (A) $c_3 = -\frac{1}{3}$ (B) $c_3 = -\frac{1}{6}$ (C) $c_3 = \frac{1}{6}$ (D) $c_3 = \frac{1}{3}$
- (D) 11. 函數 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換(Laplace transform)為 $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ，令 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(s+1)^2}$ ，則下列何者正確？
- (A) $f(t) = te^{-t} - e^{-t} + 1$ (B) $f(t) = -te^{-t} + e^{-t} + 1$
 (C) $f(t) = -te^{-t} - e^{-t} - 1$ (D) $f(t) = -te^{-t} - e^{-t} + 1$
- (B) 12. 函數 $f(t) = 2 \cos(3t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ ，若 $t=0$ 處， $f(t)$ 的傅立葉餘弦級數(Fourier cosine series)收斂到 A，傅立葉正弦級數(Fourier Sine series)收斂到 B；在 $t = \frac{\pi}{3}$ 處， $f(t)$ 的傅立葉餘弦級數(Fourier cosine series)收斂到 C，傅立葉正弦級數(Fourier Sine series)收斂到 D。則 A,B,C,D 各值為何？
- (A) $A=0, B=0, C=0, D=0$ (B) $A=2, B=0, C=-2, D=0$
 (C) $A=0, B=2, C=-2, D=0$ (D) $A=2, B=0, C=2, D=0$

迎戰二試關鍵

志光學儒保成 體能測驗課程



專業訓練



迅速強化

立即加入LINE

報名登記



- (D) 13. 已知函數 $f(t) = \frac{1}{a} e^{-a|t|}, a > 0$ ，則下列何者為函數 $f(t)$ 傅立葉轉換(Fourier transform)($i = \sqrt{-1}$)?

(A) $\frac{-2i\omega}{a(a^2 + \omega^2)}$ (B) $\frac{2i\omega}{a(a^2 + \omega^2)}$ (C) $\frac{-2}{a^2 + \omega^2}$ (D) $\frac{2}{a^2 + \omega^2}$

(B) 14. 考慮複數變函數 $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ ，其中 $z=x+iy$ 。則 $\frac{df(z)}{dz}$ 為何？

(A) $\frac{df(z)}{dz} = (-6xy) + i(3x^2 - 3y^2)$

(B) $\frac{df(z)}{dz} = (3x^2 - 3y^2) + i(6xy)$

(C) $\frac{df(z)}{dz} = (3x^2 - 3y^2) + i(3x^2 - 3y^2)$

(D) $f(z)$ 不可以微分

(B) 15. 考慮複變函數(complex function) $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z+5}$ ，若 C 為逆時鐘繞圓周 $|z - 1 - i| = 2$ 的路徑，且積分 $\oint_C f(z)dz = a + bi$ ，則下列選項何者正確？

(A) $a = \frac{\pi}{2}$

(B) $a = \pi$

(C) $b = -\frac{\pi}{2}$

(D) $b = -\pi$

(B) 16. 給定複變數函數 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ ，針對區域 $1 < |z| < 3$ 對函數 $f(z)$ 展開可得 $f(z) = \dots + az^{-1} + b + cz + dz^2 + \dots$ ，則下列選項何者正確？

(A) $a = -\frac{1}{3}$

(B) $b = -\frac{1}{3}$

(C) $c = -\frac{1}{3}$

(D) $d = -\frac{1}{3}$

(C) 17. 某元件使用壽命 X (單位：小時)，其機率密度函數(probability density function)為 $f(x) = 0.005e^{kx}, x \geq 0$ 。則 k 值及元件平均使用壽命為何？

(A) $k=0.005$ ，平均使用壽命 200 小時

(B) $k=0.005$ ，平均使用壽命 ∞ 小時

(C) $k=-0.005$ ，平均使用壽命 200 小時

(D) $k=-0.005$ ，平均使用壽命 ∞ 小時

(B) 18. 某雜訊的機率密度函數(probability density function)為 $[-1, 3]$ 的均勻分布，其變異數(variance)為 A 。經過增益為 5 的放大器放大以後，其變異數為 B 。則 A, B 各值為何？

(A) $A = \frac{4}{3}, B = \frac{20}{3}$

(B) $A = \frac{4}{3}, B = \frac{100}{3}$

(C) $A = \frac{16}{3}, B = \frac{80}{3}$

(D) $A = \frac{16}{3}, B = \frac{400}{3}$

(D) 19. 令隨機變數 X, Y 的聯合機率密度函數(Joint probability density function)為 $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kx(1+2y), & 0 \leq x \leq 2, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，其中 k 為實數，則下列何者正確？

(A) $k = \frac{1}{2}$

(B) 邊際機率密度(Marginal probability density function)為 $g(x) = \frac{x}{4}, 0 \leq x \leq 2$

(C) 邊際機率密度(Marginal probability density function)為 $h(y) = \frac{1+2y}{4}, 0 < y < 1$

(D) 條件機率密度(conditional probability density function)為 $f(y|x) = \frac{1+2y}{2}, 0 < y < 1$

(C) 20. 給定兩向量 $u = [2 \ -1 \ 3]^T$ 及 $v = [4 \ -1 \ 2]^T$ ，分解 u 為 $u_1 + u_2$ ，其中 u_1 為 u 在 v 的垂直投影(orthogonal projection)，則下列選項何者錯誤？

(A) 向量 $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{20}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{10}{7} \end{bmatrix}^T$

(B) 向量 u_2 的範數(norm) $\|u_2\| = \frac{\sqrt{161}}{7}$

(C) 兩向量 u_2, v 的外積(cross product)為零向量

成為國營.特考之星

就選志光學儒保成



鐵路特考 高員三級運輸營業 莊○翔	鐵路特考 高員三級會計 陳○利	鐵路特考 高員三級材料管理 陳○勳	鐵路特考 員級運輸營業 邱○峰	國營事業職員 台電企管 徐○玫	國營事業職員 台糖備電 馬○雍
台電僱員 綜合行政中區 蘇○婷	台電僱員 綜合行政南區 李 ○	台電僱員 綜合行政東區 李魏○榛	台電僱員配電 線路維護南區 蔡○寬	台電僱員配電 線路維護澎湖區 陳○豪	台電僱員 起重技術北區 邱○元
台水評價人員 營運士業務類第五區 劉○謨	台水評價人員 營運士行政類第七區 王○禾			台水評價人員 技術士操作類(甲)第四區 陳○愷	中華郵政專業職(二) 外勤郵遞業務南投 陳○丞
中華郵政專業職(二) 外勤郵遞業務三重 陳○忻	中華郵政專業職(二) 外勤郵遞業務板橋 李○霖			中華郵政專業職(二) 內勤櫃台業務(身心)屏東 卓○芬	中華郵政專業職(二) 內勤櫃台業務(身心)南投 廖○軒
中華郵政專業職(二) 內勤櫃台業務(身心)台東 林○省	中華郵政專業職(二) 內勤櫃台業務(身心)苗栗 江○維			中華郵政專業職(二) 內勤櫃台業務(身心)台中 洪○恆	中華郵政專業職(二) 內勤櫃台業務南投 賴○璋
中華郵政專業職(二) 內勤櫃台業務新竹 廖○涵	中華郵政專業職(二) 內勤櫃台業務苗栗 徐○恩	中華郵政專業職(二) 內勤櫃台業務三重 葉○熔	中華郵政專業職(二) 內勤櫃台業務台南 葛○瑄	中華郵政專業職(二) 內勤櫃台業務台中 李○億	中華郵政專業職(二) 內勤郵務處理嘉義 吳○軒
中華郵政專業職(二) 內勤郵務處理台北 洪○強	中華郵政專業職(二) 內勤郵務處理三重 李○喬	中華郵政專業職(二) 內勤郵務處理台北 紀○名	中華郵政專業職(二) 內勤外匯櫃台台南 黃○瑄	中華郵政專業職(一) 程式設計不分區 呂○珊	 完整榜單查詢 請洽全國各班