

112 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：統計
科 目：統計學

吳迪老師

一、若隨機變數 $Y|X=x \sim U(0,x)$ 且 $X \sim U(0,1)$ 其中 U 代表連續均勻分配。試求：

(一) (X,Y) 的聯合密度函數 $f_{XY}(x,y)$ 。(5 分)

(二) Y 的機率密度函數 $f_Y(y)$ 。(5 分)

(三) $E(Y)$ 、 $\text{Var}(Y)$ 、 $E(XY)$ 、 $\text{Cov}(X,Y)$ 、 ρ_{XY} 。(15 分)

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考聯合機率函數及分部積分
3. 《命中特區》：吳迪著”統計學” P4-2~P4-20

【擬答】：

(一) $Y|X=x \sim U(0,x)$

$$\Rightarrow f(y|x) = \frac{1}{x}, 0 < y < x$$

且 $X \sim U(0,1)$

$$\Rightarrow f(x) = 1, 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow f(x,y) = f(x)f(y|x) = \frac{1}{x}, 0 < y < x < 1$$

(二) $f(y) = \int f(x,y) dx$

$$= \int_y^1 \frac{1}{x} dx = [\ln X] \Big|_y^1$$

$$= -\ln y, 0 < y < 1$$

(三)

$$1. E(Y) = \int y f(y) dy$$

$$= \int_0^1 -y \ln y dy$$

利用分卻積分

$$u = \ln y \rightarrow du = \frac{1}{y} dy$$

$$dv = -y dy \rightarrow v = -\frac{1}{2} y^2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 -y \ln y dy = \int u dv$$

$$= uv - \int v du$$

$$= \left[-\frac{1}{2} y^2 \ln y \right] \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2} y dy = \frac{1}{4}$$

$$2. E(Y^2) = \int y^2 f(y) dy$$

$$= \int_0^1 -y^2 \ln y dy = \frac{1}{9} \text{(由分卻積分)}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$= \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{144}$$

公職王歷屆試題(112 高考三級)

$$3. E(XY) = \int \int_{xy} f(x,y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_y^1 xy \frac{1}{x} dx dy = \frac{1}{6}$$

$$4. X \sim U(0,1) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

$$5. X \sim U(0,1) \Rightarrow \text{Var}(X) = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{1}{24}}{\sqrt{\frac{1}{12}} \sqrt{\frac{7}{144}}}$$

$$= 0.6547$$

二、已知變異數是 25，平均數 μ 未知之常態分配中取出樣本大小為 n 之隨機樣本 X_1, X_2, \dots, X_n ，在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，檢定假設 $H_0: \mu=30$ vs. $H_1: \mu < 30$ 。若希望 $\mu=26.7$ 時之檢定力達 0.975，則需要多少樣本數？(25 分)

1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：求樣本數，基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”統計學” P8-12

【擬答】：

$$\begin{cases} H_0: M = 30 (M_0) \\ H_1: M < 30 (M_1 = 26.7) \end{cases}$$

$$n = \frac{(Z_\alpha + Z_\beta)^2 \sigma^2}{(M_0 - M_1)^2} = \frac{(Z_{0.05} + Z_{0.025})^2 \sigma^2}{(M_0 - M_1)^2}$$

$$= \frac{(1.645 + 1.96)^2 \times 25}{(30 - 26.7)^2}$$

$$= 29.83$$

取 $n=30$

三、欲比較三種不同植物荷爾蒙(A、B、C)對癒傷組織新芽分化的影響。每種植物荷爾蒙均重複五次實驗，分別測量所誘導出的新芽長度(cm)，得到資料如下：

| 荷爾蒙 | | |
|-----|-----|-----|
| A | B | C |
| 1.7 | 0.4 | 1.1 |
| 1.6 | 0.5 | 1.0 |
| 1.5 | 0.3 | 0.7 |
| 1.9 | 0.2 | 0.8 |
| 1.2 | 0.3 | 0.5 |

- (一)試列出變異數分析(ANOVA)表及詳細計算過程。(10 分)
- (二)試問 3 種植物荷爾蒙對誘導出的新芽長度的效果是否相等 ($\alpha=0.05$)？請詳細寫出 a.虛無與對立假設、b.檢定統計量公式、c.拒絕域、d.檢定值之計算過程、e.檢定結果與結論。(10 分)
- (三)資料需符合那 3 個假設？(5 分)

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考單因子變異數分析, 基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”統計學” P9-7~P9-8

【擬答】：

(一)

| | | | |
|---|-------|-------|-------|
| | A | B | C |
| | 1.7 | 0.4 | 1.1 |
| | 1.6 | 0.5 | 1.0 |
| | 1.5 | 0.3 | 0.7 |
| | 1.9 | 0.2 | 0.8 |
| | 1.2 | 0.3 | 0.5 |
| 和 | 7.9 | 1.7 | 4.1 |
| | T_1 | T_2 | T_3 |

$$T_{..} = 7.9 + 1.7 + 4.1 = 13.7$$

$$\sum \sum X_{ij}^2 = 1.7^2 + 1.6^2 + \dots + 0.5^2 = 16.97$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = 5, N = 15$$

$$1. SST = \sum \sum X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N} = 16.97 - \frac{13.7^2}{15} = 4.46$$

$$2. SSTR = \sum \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T_{..}^2}{N} = \left[\frac{7.9^2}{5} + \frac{1.7^2}{5} + \frac{4.1^2}{5} \right] - \frac{13.7^2}{15} = 3.91$$

$$3. SSE = SST - SSTR = 0.55$$

ANOVA 表

| 來源 | SS | df | MS | F 值 |
|-----|------|----|-------|--------|
| 組間 | 3.91 | 2 | 1.955 | F=42.5 |
| 組內 | 0.55 | 12 | 0.046 | |
| 總變異 | 4.46 | 14 | | |

志光·保成·學儒 做你的學習靠山

快速考取班

掌握考取節奏
安心學習無負擔

學費省很大

全年課程不間斷，一次繳清學費輔導至考取

課程最完整

完整課程循環，基礎班→正規班→專題課→總複習…等

上榜賺獎金

報名考取班第一年考取同職等考試，頒發獎學金

加選最超值

輔導期間加選其科目增加考試機會，加選另享專案優惠

公約有保障

考取班簽訂公約，保障您的權利與義務至考取為止



考取班 / 一年考取

雙料金榜

蔡○婷 111高普考會計

我報名考取班，本來以為自己會準備很久，但有幸於第一年取得錄取之結果。面對排得滿滿的課表，做到每科上完都複習、練習習題，需要消化課堂內容，將老師教導的知識轉變成自己的，須要面臨進度、複習、老師期望、同學競爭、自責、不確定會不會上榜的壓力…『不要放棄！』，因為這些壓力會變成自己不敢懈怠的原因。

依各區規劃為主，請洽全國門市

公職王歷屆試題(112 高考三級)

$$(二) \begin{cases} H_0 : M_1 = M_2 = M_3 \\ H_1 : M_i \text{ 不完全相同, } i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\text{拒絕域 } C = \{F | F > F_{0.05}(2, 12) = 3.8853\}$$

檢定統計量

$$F = 42.5 \in C \Rightarrow \text{ReHo}$$

結論：有證據顯示 3 種植物荷爾蒙對誘導出的新芽長度的效果不完全相同。

(三)

1. 常態性
2. 變異數同質性
3. 獨立性

四、某電子公司想瞭解某電子組件之壽命，於是隨機取出樣本大小為 $n=10$ 的隨機樣本 X_1, X_2, \dots, X_{10} ，其中 X_i 表示每個電子組件之壽命。若得到的樣本數據為 9, 3, 5, 7, 2, 3, 1, 4, 8, 4 (單位：10,000 小時)，請使用符號檢定方法，以 $\alpha=0.05$ 來檢定電子組件之壽命的中位數是否有顯著超過 2.5 萬小時？(25 分)

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考無母數中位數檢定，常考題
3. 《命中特區》：吳迪著”統計學” P12-19~P12-20

志光·保成·學儒

快速考取 有訣竅

聽聽商科考取學長姐怎麼說

| | |
|--|---|
| <p>全國探花 10個月考取 李○丞 111高考經建行政</p> <p>基本上只要跟著老師的進度，就可以應對絕大部分的國考題目，太偏門的題目不用過度在意。若有多餘時間，建議可拿來加強申論計算題部分，最後再次強烈建議要耐著性子寫過所有老師提供的題目。感謝補習班提供的學習資源，讓我可以以非本科生的身分，在準備一年內就以不錯的成績上榜。</p> | <p>一年考取 雙料金榜 郭○瑄 111高普考財稅行政</p> <p>到補習班報名已經是9月下旬，由於本身非常不喜歡對著電腦上課，所以即使課程已經超過近三分之一，還是決定報面授課程。因為申論題在高考占比很重，批改申論題的資源又難找，於是決定參加奪榜特訓班，一方面有各科老師批改，另一方面還有模擬考，對於沒考過又時間緊迫的我是非常重要的資源。</p> |
| <p>一年考取 雙料金榜 周○營 111高普考會計</p> <p>按照老師的進度，從4/1開始，每天練習歷屆試題，沒教過就做記號跳過，但有教過就要去弄懂，把常考的章節練熟，高普考前會有當年度身心障礙特考等考試，也要練習。一定要選擇最適合自己的讀書方法，有人需要做筆記，有人一本書主義，但最重要的，要一直練習題目，從題目去抓常考的章節。</p> | <p>一年考取 優異考取 李○亦 111普考統計</p> <p>非本科系的可以照著老師打勾的重點能背盡量背，另外總複習的課程也要多加留意近期的科技趨勢都可能成為命題重點。不要放棄自己的弱科，每科都有被救起來的機會。已經上手的科目要繼續保持，時常複習保持語感及記憶。開心念書最重要，必須擇你所愛，只有徹底沉浸在書海之中才能看得更多。</p> |

【擬答】：

$$\begin{cases} H_0 : \eta \leq 2.5 \\ H_1 : \eta > 2.5 \end{cases}$$

公職王歷屆試題(112 高考三級)

$\alpha = 0.05$

$D(+) = 8, D(-) = 2$

$S = \min\{D(+), D(-)\} = 2$

$n = 10$, 利用 p -value 法

$\Rightarrow p\text{-value} = P(X \leq S | p = \frac{1}{2})$

$= \sum_{x=0}^2 C_x^{10} (\frac{1}{2})^{10}$

$= C_0^{10} (\frac{1}{2})^{10} + C_1^{10} (\frac{1}{2})^{10} + C_2^{10} (\frac{1}{2})^{10}$

$= 0.055 > 0.05 = \alpha$

\Rightarrow not ReHo

結論：沒有證據顯示中位數有顯著超過 2.5。

我們都在 **志光·保成·學儒** 成為公務員

商科上榜生一致的選擇

強 111高普商科 雙料金榜

| | | | | | | | | | | | |
|-------|------|-----|-------|------|-----|-------|----|-----|-------|----|-----|
| 高普考雙榜 | 財稅行政 | 吳○蓉 | 高普考雙榜 | 財稅行政 | 黃○萍 | 高普考雙榜 | 會計 | 黃○荳 | 高普考雙榜 | 會計 | 劉○彤 |
| 高普考雙榜 | 財稅行政 | 李○芸 | 高普考雙榜 | 財稅行政 | 黃○聰 | 高普考雙榜 | 會計 | 黃○璩 | 高普考雙榜 | 會計 | 賴○婷 |
| 高普考雙榜 | 財稅行政 | 林○弘 | 高普考雙榜 | 財稅行政 | 楊○君 | 高普考雙榜 | 會計 | 楊○昇 | 高普考雙榜 | 會計 | 王○惠 |
| 高普考雙榜 | 財稅行政 | 花○廷 | 高普考雙榜 | 財稅行政 | 葉○瑜 | 高普考雙榜 | 會計 | 楊○芸 | 高普考雙榜 | 會計 | 歐○寧 |
| 高普考雙榜 | 財稅行政 | 洪○懿 | 高普考雙榜 | 財稅行政 | 葉○瑜 | 高普考雙榜 | 會計 | 劉○均 | 高普考雙榜 | 會計 | 鄭○婕 |
| 高普考雙榜 | 財稅行政 | 張○育 | 高普考雙榜 | 財稅行政 | 賴○婷 | 高普考雙榜 | 會計 | 劉○嘉 | 高普考雙榜 | 會計 | 陳○君 |
| 高普考雙榜 | 財稅行政 | 西○穎 | 高普考雙榜 | 財稅行政 | 謝○ | 高普考雙榜 | 會計 | 蔡○珊 | 高普考雙榜 | 會計 | 游○海 |
| 高普考雙榜 | 財稅行政 | 張○穎 | 高普考雙榜 | 財稅行政 | 蘇○閱 | 高普考雙榜 | 會計 | 蔡○婷 | 高普考雙榜 | 會計 | 高○洋 |
| 高普考雙榜 | 財稅行政 | 章○卿 | 高普考雙榜 | 財稅行政 | 鍾○凱 | 高普考雙榜 | 會計 | 蔡○藥 | 高普考雙榜 | 會計 | 高○璋 |
| 高普考雙榜 | 財稅行政 | 莊○瑜 | 高普考雙榜 | 財稅行政 | 蔡○穎 | 高普考雙榜 | 會計 | 謝○晉 | 高普考雙榜 | 會計 | 傅○強 |
| 高普考雙榜 | 財稅行政 | 郭○瑄 | 高普考雙榜 | 財稅行政 | 郭○瑄 | 高普考雙榜 | 會計 | 謝○晉 | 高普考雙榜 | 會計 | 計○深 |
| 高普考雙榜 | 財稅行政 | 陳○維 | 高普考雙榜 | 財稅行政 | 彭○娟 | 高普考雙榜 | 會計 | 羅○芸 | 高普考雙榜 | 會計 | 楊○蔡 |
| 高普考雙榜 | 財稅行政 | 黃○琪 | 高普考雙榜 | 會計 | 彭○娟 | 高普考雙榜 | 會計 | 陳○涵 | 高普考雙榜 | 會計 | 蔡○泰 |

版面有限 謹向未刊登者致歉

連過3榜 楊○芸 111關務特考關稅會計 狀元
111高普會計 榜眼
111普考會計 狀元

我是選擇面授上課，與老師面對面能讓我提高專注力，對課程內容有疑問時，也能即時向老師詢問，雖然往返補習班的時間不少，但對於時間規劃不是特別有自信的我來說，面授能幫助我跟上老師的進度。

一年考取

任○宜 111高普財稅行政 榜眼

我自己覺得理想的讀書方式是上完課之後在上下一堂之前，先把上課講過的題目自己再做一次，如果有相關的練習題也一併寫完，補習班每個月會出申論題，寫好後會有老師批改回饋，以檢討修正及釐清觀念。

一年考取