

## 112 年公務人員普通考試試題

類 科：測量製圖

科 目：測量平差法概要

甲、申論題部分：

- 一、利用電子測距儀量測 A、B 兩點距離 6 次，分別為 10.104 m、10.096 m、10.103 m、10.298 m、10.097 m、10.100 m，若假定觀測數據獨立不相關，請計算該距離的最或是值和最或是值之標準偏差（中誤差）。（25 分）

1. 《考題難易》★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：最或是值和最或是值之標準偏差（中誤差）。

重點提要：粗差刪除，以 2 倍觀測值中誤差作為刪除原則

3. 【命中特區】

書名：測量平差法 上課教材

作者：賴明

章節出處：第三章 直接觀測平差之一、等精度（等權）直接觀測平差

【擬答】

(一)以 6 個觀測值計算最或是值和最或是值之標準偏差（中誤差）

最或是值  $L = (10.104 + 10.096 + 10.103 + 10.298 + 10.097 + 10.100) / 6 = 10.133\text{m}$

誤差  $v_1 = 10.104 - 10.133 = -0.029$ ，同理， $v_2 = -0.037$ ， $v_3 = -0.03$ ， $v_4 = 0.165$ ， $v_5 = -0.036$ ， $v_6 = -0.033$

誤差平方和  $[vv] = (-0.029)^2 + (-0.037)^2 + (-0.03)^2 + 0.165^2 + (-0.036)^2 + (-0.033)^2 = 0.03272$

觀測值中誤差  $m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{0.03272}{6-1}} = \pm 0.081$ ， $2m = 0.162$

$\because v_4 = 0.165 > 0.162 = 2m$   $\therefore$  第 4 個觀測值 10.298m，為粗差，應予刪除。

(二)以 5 個觀測值計算最或是值和最或是值之標準偏差（中誤差）

最或是值  $L = (10.104 + 10.096 + 10.103 + 10.097 + 10.100) / 5 = 10.100\text{m}$

誤差  $v_1 = 10.104 - 10.100 = 0.004$ ，同理， $v_2 = -0.004$ ， $v_3 = 0.003$ ， $v_4 = -0.003$ ， $v_5 = 0.000$

誤差平方和  $[vv] = 0.004^2 + (-0.004)^2 + 0.003^2 + (-0.003)^2 + 0.000^2 = 5 \times 10^{-5}$

最或是值之標準偏差（中誤差） $\sigma = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{5 \times 10^{-5}}{5 \times (5-1)}} = \pm 0.0016 \approx \pm 0.002\text{m}$

$\therefore$  最或是值和最或是值之標準偏差（中誤差） $= 10.100\text{m} \pm 0.002\text{m}$

二、一橢圓形操場，用皮捲尺量得橢圓之長、短軸半徑分別為  $a=10\text{ m}\pm 0.10\text{ m}$  及  $b=5\text{ m}\pm 0.05\text{ m}$ ，請計算該橢圓操場面積和面積之中誤差。(25 分)

1. 《考題難易》★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：誤差傳播定律之應用，面積。

重點提要：橢圓面積公式。善用面積公式進行化簡。

3. 【命中特區】

書名：測量平差法 上課教材

作者：賴明

章節出處：第二章 誤差傳播定律及其應用

【擬答】

已知：  $a=10\text{ m}\pm 0.10\text{ m}$ ， $b=5\text{ m}\pm 0.05\text{ m}$

橢圓操場面積  $S=\pi ab=\pi*10*5=50\pi=157.08\text{ m}^2$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}(\pi ab) = \pi b = \frac{S}{a}, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}(\pi ab) = \pi a = \frac{S}{b}$$

$$\sigma_S = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2 \times \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)^2 \times \sigma_b^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{S}{a}\right)^2 \times \sigma_a^2 + \left(\frac{S}{b}\right)^2 \times \sigma_b^2}$$

$$\sigma_S = \pm S \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2} = \pm 157.08 \times \sqrt{\left(\frac{0.1}{10}\right)^2 + \left(\frac{0.05}{5}\right)^2} = \pm 2.22\text{ m}^2$$

$\therefore$  該橢圓操場面積和面積之中誤差  $= 157.08\text{ m}^2 \pm 2.22\text{ m}^2$



志光 保成 學儒

# 我連過3榜!



>>>跟著老師上課的進度走  
很快地就可以把所有內容讀熟，順利上榜!

<電子學>一開始的基本觀念建立都是跟老師的課開始，將老師提供的筆記多次反覆的來抄寫背誦，基本上就有機會對大部份考題略懂。

<基本電學>及<電子學>筆記就照著老師板書寫的抄寫下來，熟讀筆記內容，接著就是不停地算題目，課本、題庫班的題目算熟，考試時會用到的觀念基本都在筆記以及題庫班中。

洪○銓

**2狀元 & 1榜眼**

111年高考電子工程 全國狀元  
111年鐵路特考高員級電子工程 全國狀元  
109年普考電子工程 全國榜眼、應屆考取

三、按照海洋測量最低標準的特等深度不確定度  $\sqrt{a^2 + (b \times d)^2}$  (95%信心區間)，其中  $a=0.25\text{ m}$  為固定水深誤差； $b=0.0075$  為從屬水深誤差因子； $d$  為水深(m)。若海水面標高為  $100\text{ m}$ ，請問水深標高  $80\text{ m}$  和  $60\text{ m}$  處之 68%信心區間的水深測量誤差限制值為何（水深越深，標高越低）？(25 分)

1. 《考題難易》★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：等深度不確定度，水深測量誤差限制值

重點提要：95%信心區間為  $1.96\sigma$ ，68%信心區間為  $\sigma$

【擬答】

已知：固定水深誤差  $a=0.25\text{ m}$ ，從屬水深誤差因子  $b=0.0075$ ，水深為  $d(\text{m})$

假設： $\sigma$  為標準差或是誤差限制值。95%信心區間為  $1.96\sigma$ ，68%信心區間為  $\sigma$

(一)水深標高  $80\text{ m}$ ，水深  $d=100-80=20\text{m}$

$$\text{特等深度不確定度 (95\%信心區間)} = \sqrt{0.25^2 + (0.0075 \times 20)^2} = 0.292\text{m}$$

$$1.96\sigma = 0.292, \quad \sigma = 0.15\text{m}, \quad \text{68\%信心區間的水深測量誤差限制值為 } \sigma = 0.15\text{m}$$

(二)水深標高  $60\text{ m}$ ，水深  $d=100-60=40\text{m}$

$$\text{特等深度不確定度 (95\%信心區間)} = \sqrt{0.25^2 + (0.0075 \times 40)^2} = 0.39\text{m}$$

$$1.96\sigma = 0.39, \quad \sigma = 0.20, \quad \text{68\%信心區間的水深測量誤差限制值為 } \sigma = 0.20\text{ m}$$

**志光 保成 學儒 陪你**

# 站上工科巔峰

電力工程

電子工程

機械工程

資訊處理

**【全國狀元】** 111 高 考 電子工程 洪○銓

**【全國榜眼】** 111 普 考 資訊處理 羅○昌

**【台北市榜眼】** 111 地特三等 電子工程 郭○瑞

**【台北市榜眼】** 111 地特四等 電力工程 張○境

**【金門縣榜眼】** 111 地特三等 資訊處理 李○杰

**【台北市探花】** 111 地特四等 電子工程 楊○榮

**【高雄市探花】** 111 地特四等 電子工程 何○宇

**【全國第五】** 112 初 等 考 電子工程 陳○豪

**【台北市第五】** 111 地特三等 電子工程 薛○文

**【全國第七】** 111 普 考 電子工程 卓○倫

**【全國第八】** 111 高 考 機械工程 江○禾

**【全國第八】** 111 普 考 電力工程 陳○璋

**【全國第八】** 111 普 考 電子工程 李○穎

**【台北市第八】** 111 地特四等 資訊處理 吳○進

**【全國第九】** 111 普 考 機械工程 施○佑

**各類考試優秀考取**

高考電力工程 丁○翔; 高考電力工程 陳○璋; 普考電力工程 梁○豐; 普考機械工程 金○璋; 高考資訊處理 陳○廷; 普考資訊處理 吳○翰; 普考資訊處理 褚○華  
 高考電力工程 王○甯; 高考電力工程 曾○倫; 高考電子工程 王○樞; 高考資訊處理 于○○; 高考資訊處理 陳○明; 普考資訊處理 李○庭; 普考資訊處理 劉○廷  
 高考電力工程 吳○哲; 高考電力工程 葛○宇; 高考電子工程 卓○倫; 高考資訊處理 李○傑; 高考資訊處理 曾○瑄; 普考資訊處理 張○偉; 普考資訊處理 劉○銘  
 高考電力工程 吳○瑋; 高考電力工程 蔡○昇; 高考電子工程 莊○寧; 高考資訊處理 胡○紘; 高考資訊處理 黃○迪; 普考資訊處理 張○慧; 普考資訊處理 鄭○然  
 高考電力工程 吳○顯; 高考電力工程 蔡○鎮; 普考電子工程 馮○恩; 高考資訊處理 張○偉; 高考資訊處理 廖○仲; 普考資訊處理 陳○明; 普考資訊處理 賴○全  
 高考電力工程 李○源; 高考電力工程 鄧○駿; 普考電子工程 蔣○霖; 高考資訊處理 許○傑; 高考資訊處理 劉○廷; 普考資訊處理 陳○堂; 地特三等 資訊處理 龍○穎  
 高考電力工程 席○榮; 普考電力工程 吳○哲; 普考機械工程 黃○榮; 高考資訊處理 郭○哲; 高考資訊處理 賴○全; 普考資訊處理 曾○瑄; 初 等 考 電子工程 楊○榮  
 高考電力工程 梁○豐; 普考電力工程 吳○瑋; 普考機械工程 江○禾; 高考資訊處理 郭○楷; 高考資訊處理 羅○昌; 普考資訊處理 黃○迪; 初 等 考 電子工程 楊○文

版面有限 無法一一刊登

四、測量一四邊形 ABCD 的 4 個內角  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\delta$ ，內角數據等權且不相關，若選擇 3 個內角  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  當成未知參數， $X_\alpha$ 、 $X_\beta$ 、 $X_\gamma$  請列出間接平差觀測方程式，並列出未知參數解和未知參數解之中誤差。(25 分)

1. 《考題難易》★★★★

2. 《破題關鍵》關鍵字：間接觀測平差，未知參數解和未知參數解之中誤差。

重點提要：等權，需引入閉合差。

3. 【命中特區】

書名：測量平差法 上課教材

作者：賴明

章節出處：第五章 間接觀測平差 之 二、等權間接觀測平差

【擬答】

假設： $X_\alpha = X_1$ 、 $X_\beta = X_2$ 、 $X_\gamma = X_3$

觀測方程式：

改正數方程式

$$\begin{cases} \alpha + v_1 = X_1 \\ \beta + v_2 = X_2 \\ \gamma + v_3 = X_3 \\ \delta + v_4 = 360^\circ - X_1 - X_2 - X_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} v_1 = X_1 - \alpha \\ v_2 = X_2 - \beta \\ v_3 = X_3 - \gamma \\ v_4 = -X_1 - X_2 - X_3 - (\delta - 360^\circ) \end{cases}, \quad V = AX - L$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta - 360^\circ \end{bmatrix}$$

組法方程式  $NX = U$ ， $N = A^T A$ ， $U = A^T L$ ， $X = N^{-1}U$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta - 360^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \delta + 360^\circ \\ \beta - \delta + 360^\circ \\ \gamma - \delta + 360^\circ \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = N^{-1}U = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha - \delta + 360^\circ \\ \beta - \delta + 360^\circ \\ \gamma - \delta + 360^\circ \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3\alpha - \beta - \gamma - \delta + 360^\circ \\ 3\beta - \alpha - \gamma - \delta + 360^\circ \\ 3\gamma - \alpha - \beta - \delta + 360^\circ \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } \omega = \alpha + \beta + \gamma + \delta - 360^\circ$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4\alpha - \omega \\ 4\beta - \omega \\ 4\gamma - \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \frac{\omega}{4} \\ \beta - \frac{\omega}{4} \\ \gamma - \frac{\omega}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \quad X_1 = X_\alpha = \alpha - \frac{\omega}{4}, \quad X_2 = X_\beta = \beta - \frac{\omega}{4}, \quad X_3 = X_\gamma = \gamma - \frac{\omega}{4}$$

$$v_1 = X_1 - \alpha = -\frac{\omega}{4}, \quad \text{同理}, \quad v_2 = -\frac{\omega}{4}, \quad v_3 = -\frac{\omega}{4}, \quad v_4 = -\frac{\omega}{4}$$

$$[vv] = \left(-\frac{\omega}{4}\right)^2 \times 4 = \frac{\omega^2}{4}, \quad \text{自由度} = n - u = 4 - 3 = 1$$

$$\text{單位權中誤差 } \sigma_o = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{4}}{1}} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{4}} = \pm \frac{\omega}{2}$$

$$\text{未知參數解之中誤差 } \sigma_{X_\alpha} = \pm \sigma_o \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\omega}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \omega,$$

$$\text{同理}, \quad \sigma_{X_\beta} = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \omega, \quad \sigma_{X_\gamma} = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \omega$$

$$\therefore \text{未知參數解: } X_\alpha = \alpha - \frac{\omega}{4}, \quad X_\beta = \beta - \frac{\omega}{4}, \quad X_\gamma = \gamma - \frac{\omega}{4}$$

$$\text{未知參數解之中誤差均為 } \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \omega$$