

## 112 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

吳迪老師解題

甲、申論題部分：(50 分)

一、求  $yy''=(y')^2$  的通解 (general solution)。(15 分)

1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：考二階微分方程, 基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P3-10~P3-12

【擬答】：

$$\text{令 } u = y' \Rightarrow y'' = u \frac{du}{dy} \text{ 代入}$$

$$yy'' = (y')^2 \Rightarrow yu \frac{du}{dy} = u^2 \Rightarrow \frac{1}{u} du = \frac{1}{y} dy$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{y} dy \Rightarrow \ln|u| = \ln|y| + C \Rightarrow u = y + C_1$$

$$\Rightarrow y' = y + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y + C_1 \Rightarrow \frac{1}{y + C_1} dy = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y + C_1} dy = \int dx \Rightarrow \ln|y + C_1| = X + C_2$$

二、求  $\int_c \bar{z} dz$ ，其中  $c$  代表複數平面上逆時針方向繞一圈的單位圓（圓點為圓心且半徑為 1 的圓）。(10 分)

1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：考複數積分, 基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P10-18~P10-20

【擬答】：

$$\text{令 } Z = e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = e^{-i\theta} \Rightarrow dz = e^{i\theta} i d\theta$$

$$\Rightarrow \int_c \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} e^{i\theta} i d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = i\theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

三、求平面  $2x - y + 2z = 1$  與平面  $x - y = 2$  之夾角  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ )。(10 分)

1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：考向量內積, 基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P9-3

【擬答】：

$$2x - y + 2z = 1 \Rightarrow \vec{N}_1 = (2, -1, 2)$$

$$x - y = 2 \Rightarrow \vec{N}_2 = (1, -1, 0)$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{(2, -1, 2) \cdot (1, -1, 0)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

四、 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，求特徵值 (eigenvalues) 與其對應的特徵向量 (eigenvectors)。(15 分)

1. 《考題難易》：★
2. 《解題關鍵》：考矩陣特徵值及特徵向量, 基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學” P8-39~P8-40

【擬答】：

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0, 2, 3$$

$$1. \lambda = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = K_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3. \lambda = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = K_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

乙、測驗題部分：(50 分)

(B) 1. 二階微分方程  $y'' - y' - 12y = 2\sinh^2(x)$ ，初始值未知，試問其全解 (通解加特解) 為何？

(A)  $C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{6}(1 - e^{-2x}) - \frac{1}{12}e^{2x}$       (B)  $C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{12}(1 - e^{-2x}) - \frac{1}{20}e^{2x}$

(C)  $C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} + (\frac{1}{12} - \frac{1}{10}e^{-2x}) - \frac{1}{6}e^{2x}$       (D)  $C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{12}e^{-2x} - \frac{1}{20}e^{2x}$

(D) 2. 二階微分方程  $3y'' + 12y = 2\tan(2x)$ ，試問其特解為何？

(A)  $-\frac{1}{6}\sin(2x) \cdot \ln|\sec(2x) + \tan(2x)|$       (B)  $-\frac{1}{2}\sin(2x) \cdot \ln|\csc(2x) + \cot(2x)|$

(C)  $-\frac{1}{6}\cos(2x) \cdot \ln|\csc(2x) + \tan(2x)|$       (D)  $-\frac{1}{6}\cos(2x) \cdot \ln|\sec(2x) + \tan(2x)|$

(A) 3. 函數  $f(t) = te^{-2t} \sin \omega t$ ，請問其經過拉式轉換 (Laplace Transform) 後為下列何者？

(A)  $F(s) = \frac{2(S+2)}{[(S+2)^2 + \omega^2]^2}$       (B)  $F(s) = \frac{2(S+2)}{[(S+2)^2 + \omega^2]}$

(C)  $F(s) = \frac{(S+2)}{[(S+2)^2 + \omega^2]^2}$       (D)  $F(s) = \frac{-2(S+2)\omega}{[(S+2)^2 + \omega^2]^2}$

(B) 4. 矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ ，試問  $A^{-1} = ?$ ， $B^{-1} = ?$

$$(A) A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -3.5 & 1 & -1.5 \\ 5.5 & -1 & 1 \\ 3.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(B) A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -2.5 & 1 & -0.5 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(C) A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -2.5 & 1 & -0.5 \\ -1.5 & 1 & 1.5 \\ 3.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(D) A^{-1} = \begin{bmatrix} -2.5 & 1 & 1.5 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (C) 5. 若  $f(x) = \begin{cases} x, 0 < x < 1 \\ 0, 1 < x < 2 \end{cases}$ ，且  $f(x) = f(x+2)$ 。若  $f(x)$  支傅立葉級數 (Fourier Series) 為

$$f(x) = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x)$$
，下列何者為非？

(A)  $a_0 = \frac{1}{4}$       (B)  $a_1 = -\frac{2}{\pi^2}$       (C)  $a_2 = -\frac{1}{2\pi^2}$       (D)  $a_3 = -\frac{2}{9\pi^2}$

- (D) 6. 一組聯立方程式以  $\overline{A}\overline{X} = \overline{B}$  的方程式表示如下：

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & T^2 - 11 \\ 4 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T - 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

其中  $T$  為常數，若上式之增廣矩陣 (augmented matrix) 為  $C$ ，又此一聯立方程式已知有無限多組解，試問  $\text{rank}(C)$  之最大值為何？ $T$  又為何？

- (A)  $\text{rank}(C)$  之最大值為 3， $T = -3$       (B)  $\text{rank}(C)$  之最大值為 4， $T = 3$   
 (C)  $\text{rank}(C)$  之最大值為 2， $T = -4$       (D)  $\text{rank}(C)$  之最大值為 2， $T = 3$

志光 保成 學儒

# 我連過 3 榜!



>>> 跟著老師上課的進度走  
 很快地就可以把所有內容讀熟，順利上榜!

<電子學>一開始的基本觀念建立都是跟老師的課開始，將老師提供的筆記多次反覆的來抄寫背誦，基本上就有機會對大部份考題略懂。  
 <基本電學>及<電子學>筆記就照著老師板書寫的抄寫下來，熟讀筆記內容，接著就是不停地算題目，課本、題庫班的題目算熟，考試時會用到的觀念基本都在筆記以及題庫班中。

洪○銓  
**2狀元 & 1榜眼**

111年高考電子工程 全國狀元  
 111年鐵路特考高員級電子工程 全國狀元  
 109年普考電子工程 全國榜眼.應屆考取



- (A) 7. 兩向量分別為  $\vec{H}(t) = 2\hat{i} + 8t\hat{j} + t^2\hat{k}$ ,  $\vec{G}(t) = -3t\hat{i} + 2e^t\hat{j} + \ln(t)\hat{k}$ , 請求出  $\frac{d}{dt}[\vec{H}(t) \times \vec{G}(t)] = ?$  (其中  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  為三度空間  $R^3$  各座標軸之單位向量符號, 亦即  $\hat{i} = (1,0,0)$ ,  $\hat{j} = (0,1,0)$ ,  $\hat{k} = (0,0,1)$ )
- (A)  $[8(1 + \ln t) - (2t^2 + 4t)e^t]\hat{i} - (9t^2 + \frac{2}{t})\hat{j} + (48t + 4e^t)\hat{k}$
- (B)  $[(1 + \ln t) - (2t^2 + 4t)e^t]\hat{i} + (-9t^2 + \frac{2}{t})\hat{j} + (48t + 4e^t)\hat{k}$
- (C)  $[8(1 + \ln t) - (2t^2 + 4t)e^t]\hat{i} + (-9t^2 + \frac{2}{t})\hat{j} + (24t + 2e^t)\hat{k}$
- (D)  $[8(1 - \ln t) - (2t^2 - 4t)e^t]\hat{i} - (9t^2 + \frac{2}{t})\hat{j} + (48t - 4e^t)\hat{k}$
- (B) 8. 一曲線參數式為  $x(t) = e^t \cos t$ ,  $y(t) = e^t \sin t$ ,  $z(t) = e^t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , 其單位切線向量為何? (其中  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  為三度空間  $R^3$  之單位向量,  $\hat{i} = (1,0,0)$ ,  $\hat{j} = (0,1,0)$ ,  $\hat{k} = (0,0,1)$ )
- (A)  $\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t)\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t)\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\hat{k}$
- (B)  $\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t)\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t)\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$
- (C)  $\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$
- (D)  $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\hat{k}$
- (D) 9. 利用梯度求解曲面  $\varphi: xy^3z^2 = 4$  在  $(-1, -1, 2)$  點之法向量的過程與結果, 以下何者錯誤? (其中  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  為三度空間  $R^3$  各座標軸之單位向量符號, 亦即  $\hat{i} = (1,0,0)$ ,  $\hat{j} = (0,1,0)$ ,  $\hat{k} = (0,0,1)$ )
- (A)  $\nabla\varphi = y^3z^2\hat{i} + 3xy^2\hat{j} + 2xy^3z\hat{k}$
- (B) 曲面  $\varphi$  在點  $(-1, -1, 2)$  上之法向量為  $-4\hat{i} - 12\hat{j} + 4\hat{k}$
- (C) 曲面  $\varphi$  在點  $(-1, -1, 2)$  上之單位法向量為  $\pm \frac{1}{\sqrt{11}}(-\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$
- (D)  $8\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k}$  曲面  $\varphi$  在點  $(-1, -1, 2)$  上之法向量
- (B) 10. 某大學 111 學年度第二學期工程數學某班共有男生 6 人, 女生 5 人, 期中考試成績如下:  
 男生: 88, 77, 40, 58, 72, 92  
 女生: 84, 60, 74, 50, 95  
 試求以男、女生做為區分條件時之標準差 (standard deviation) 各為何? (請數值最接近者)
- (A) 男生: 16.95; 女生: 15.78 (B) 男生: 17.78; 女生: 16.14  
 (C) 男生: 17.78; 女生: 15.78 (D) 男生: 16.95; 女生: 16.17
- (A) 11. 請利用柯西-里曼方程式 (Cauchy-Riemann Equation) 驗證下列何者非可解析函數 (non-analytic function)? (其中  $Z$  為複數)
- (A)  $f(z) = |z|$  (B)  $f(z) = \sin z$  (C)  $f(z) = z^2 + 2z - 1$  (D)  $f(z) = e^z$
- (B) 12. 矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 試問行列式  $\det(AB) = ?$
- (A) 0 (B) 576 (C) 22 (D) 121

(A) 13. 定義  $i = \sqrt{-1}$ ，求  $(1+i)^{12}$  的運算結果為何？

- (A)-64 (B)-128 (C)-512 (D)-256

(A) 14. 函數  $f(t)$  經拉式轉換後為  $L[f(t)] = \frac{S-1}{(S+3)(S^2+2S+2)}$ ，試問  $f(t)$  應為？

- (A)  $-\frac{4}{5}e^{-3t} - e^{-t}(\frac{3}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t)$  (B)  $-\frac{4}{5}e^{-3t} - e^{-t}(\frac{3}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t)$   
 (C)  $\frac{4}{5}e^{-3t} - e^{-t}(\frac{4}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t)$  (D)  $-\frac{4}{5}e^{-3t} - e^{-t}(\frac{4}{5}\sin t - \frac{3}{5}\cos t)$


(A) 15. 若  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 3 & -5 \\ 2 & -7 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$  且  $B = A^{-1}$ ，請問行列式  $\det(B^2)$  為下列何者？

- (A) 1/900 (B) 1/700 (C) 1/500 (D) 1/300

(A) 16. 已知矩陣  $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  具有特徵向量  $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$  及  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，請問下列何者可為其對角化

(Diagonalization) 矩陣？

- (A)  $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



**志光保成學儒陪你**

# 站上工科巔峰

<p><b>【全國狀元】</b> 111 高 考 電子工程 洪○銓</p> <p><b>【全國榜眼】</b> 111 普 考 資訊處理 羅○昌</p> <p><b>【台北市榜眼】</b> 111 地特三等 電子工程 郭○瑞</p> <p><b>【台北市榜眼】</b> 111 地特四等 電力工程 張○境</p> <p><b>【金門縣榜眼】</b> 111 地特三等 資訊處理 李○杰</p> <p><b>【台北市探花】</b> 111 地特四等 電子工程 楊○榮</p> <p><b>【高雄市探花】</b> 111 地特四等 電子工程 何○宇</p> <p><b>【全國第五】</b> 112 初 等 考 電子工程 陳○豪</p>	<p><b>【台北市第五】</b> 111 地特三等 電子工程 薛○文</p> <p><b>【全國第七】</b> 111 普 考 電子工程 卓○倫</p> <p><b>【全國第八】</b> 111 高 考 機械工程 江○禾</p> <p><b>【全國第八】</b> 111 普 考 電力工程 陳○璋</p> <p><b>【全國第八】</b> 111 普 考 電子工程 李○穎</p> <p><b>【台北市第八】</b> 111 地特四等 資訊處理 吳○進</p> <p><b>【全國第九】</b> 111 普 考 機械工程 施○佑</p>
---	---

**各類考試優秀考取**

高考電力工程 丁○翔; 高考電力工程 陳○璋; 普考電力工程 梁○豐; 普考機械工程 金○璋; 高考資訊處理 陳○廷; 普考資訊處理 吳○翰; 普考資訊處理 褚○華  
 高考電力工程 王○高; 高考電力工程 曾○倫; 高考電子工程 王○榕; 高考資訊處理 于 ○; 高考資訊處理 陳○明; 普考資訊處理 李○庭; 普考資訊處理 劉○廷  
 高考電力工程 吳○哲; 高考電力工程 葛○宇; 高考電子工程 卓○倫; 高考資訊處理 李○庭; 普考資訊處理 曾○璋; 普考資訊處理 張○偉; 普考資訊處理 劉○銘  
 高考電力工程 吳○璋; 高考電力工程 蔡○昇; 高考電子工程 莊○雪; 普考資訊處理 胡○炫; 普考資訊處理 黃○迪; 普考資訊處理 張○慧; 普考資訊處理 鄭○然  
 高考電力工程 吳○耀; 高考電力工程 蔡○謙; 普考電子工程 馮○恩; 普考資訊處理 張○偉; 普考資訊處理 廖○仲; 普考資訊處理 陳○明; 普考資訊處理 賴○全  
 高考電力工程 李○源; 高考電力工程 郭○謙; 普考電子工程 蔣○霖; 普考資訊處理 許○傑; 普考資訊處理 劉○廷; 普考資訊處理 陳○堂; 地特三等 資訊處理 顏○頤  
 高考電力工程 席○榮; 普考電力工程 吳○哲; 普考機械工程 黃○榮; 普考資訊處理 郭○哲; 普考資訊處理 賴○全; 普考資訊處理 曾○瑜; 初 等 考 電子工程 楊○榮  
 高考電力工程 梁○豐; 普考電力工程 吳○璋; 普考機械工程 江○禾; 普考資訊處理 羅○昌; 普考資訊處理 黃○迪; 初 等 考 電子工程 楊○文

版面有限 無法一一刊登

(A) 17. 方程式  $e^x y' = 2(x+1)y^2$ ,  $y(0) = 1/6$  之解為下列何者？

- (A)  $y = \frac{1}{(2x+4)e^{-x} + 2}$  (B)  $y = \frac{-1}{(2x-4)e^{-x} - 2}$   
 (C)  $y = \frac{1}{(-2x+4)e^{-x} + 2}$  (D)  $y = \frac{1}{(2x+4)e^x + 2}$

(B) 18. 求  $\frac{1}{s^2}(\frac{s-1}{s+1})$  之反拉式轉換 (Inverse Laplace Transform) 為下列何者？

- (A)  $-2e^{-t} + t + 2$  (B)  $-2e^{-t} - t + 2$  (C)  $-2e^t + t - 2$  (D)  $-2e^t - t - 2$

公職王歷屆試題 (112 高考三級)

(D) 19. 求  $\cosh(at)\cos(at)$  之拉式轉換為下列何者? (其中  $a$  為實數)

(A)  $\frac{2a^2s}{s^4+4a^4}$       (B)  $\frac{2a^2+s^2}{s^4+4a^4}$       (C)  $\frac{s^2-2a^2}{s^4+4a^4}$       (D)  $\frac{s^3}{s^4+4a^4}$

(D) 20. 已知  $f(t) = \frac{\sin 8t}{t}$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j5t} dt$  之值為下列何者? ( $j = \sqrt{-1}$ )

(A)  $j\pi$       (B)  $j\frac{\pi}{2}$       (C)  $\frac{\pi}{2}$       (D)  $\pi$

公  
職  
王