

112 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：經建行政、農業行政

科 目：統計學

考試時間：2 小時

吳迪 老師

一、令 X_1, \dots, X_6 表示服從指數分配 (Exponential distribution) $Exp(\theta)$ 的隨機樣本，其機率密度函數為 $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0$ 。(每小題 8 分，共 24 分)

(一) 計算 $E(X_1)$ 。(E: Expectation) (須列出計算過程)

(二) 令 $Y = \sum_{i=1}^6 X_i$ ，求隨機變數 Y 的動差母函數 (moment generating function)，並回答 Y 的機率分配名稱。(須列出計算過程)

(三) 令 $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^6 X_i}{6}$ ，求隨機變數 \bar{Y} 的動差母函數 (moment generating function)，並回答 \bar{Y} 的機率分配名稱。(須列出計算過程)

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考指數分配與 Gamma 分配
3. 《命中特區》：吳迪著”統計學” P5-50~P5-57

【擬答】：

(一)

$$\begin{aligned} E(x_1) &= \int x_1 f(x_1) dx_1 = \int_0^{\infty} x_1 \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_1}{\theta}} dx_1 \\ &= \theta \int_0^{\infty} \frac{x_1}{\theta} e^{-\frac{x_1}{\theta}} d\left(\frac{x_1}{\theta}\right) = \theta \Gamma(2) = \theta \end{aligned}$$

(二)

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\frac{1}{\theta} - t}, t < \frac{1}{\theta} \\ \Rightarrow M_Y(t) &= M_{\sum_{i=1}^6 x_i}(t) = \left(\frac{1}{\frac{1}{\theta} - t}\right)^6, t < \frac{1}{\theta} \end{aligned}$$

由動差母函數唯一性

$$\Rightarrow Y \sim \text{Gamma}(\alpha = 6, \lambda = \frac{1}{\theta})$$

(三)

$$M_{\bar{Y}}(t) = M_Y(t) = M_Y\left(\frac{t}{6}\right) = \left(\frac{1}{\frac{1}{\theta} - \frac{t}{6}}\right)^6 = \left(\frac{6}{\frac{6}{\theta} - t}\right)^6$$

由動差母函數唯一性

$$\Rightarrow \bar{Y} \sim \text{Gamma}(\alpha = 6, \lambda = \frac{6}{\theta})$$

二、考慮簡單線性迴歸模型， $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$, $\epsilon_i \sim^{iid} N(0, \sigma^2)$ ， $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 分別為 β_0 與 β_1 之最小平方估計式，計算下列各子題：(每小題 10 分，共 20 分)

(一) 計算 $Cov(\bar{y}, \hat{\beta}_1)$ ，其中 \bar{y} 為反應變數 Y 之平均數， Cov 是指共變異數 (Covariance)。

(二) 計算 $Var(\hat{\beta}_0 + 0.8\hat{\beta}_1)$ ， Var 是指變異數 (Variance)。

1. 《考題難易》：★★★
 2. 《解題關鍵》：考最小平方迴歸係數的估計及性質
 3. 《命中特區》：吳迪著”統計學” P10-4~P10-12

【擬答】：

$$(一) \hat{\beta}_1 = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \sum_{i=1}^n K_i Y_i$$

$$\text{其中 } K_i = \frac{X_i - \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\text{且 } \sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = 0$$

$$\Rightarrow Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) = Cov(\bar{Y}, \sum_{i=1}^n K_i Y_i)$$

$$= Cov\left(\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}, K_1 Y_1 + K_2 Y_2 + \dots + K_n Y_n\right)$$

$$= Cov\left(\frac{Y_1}{n}, K_1 Y_1\right) + \dots + Cov\left(\frac{Y_n}{n}, K_n Y_n\right)$$

$$= \frac{K_1}{n} \sigma^2 + \dots + \frac{K_n}{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n K_i = 0$$

$$(二) Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = Cov(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}, \hat{\beta}_1)$$

$$= Cov(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) - \bar{X} Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_1)$$

$$= -\frac{\bar{X} \sigma^2}{SS_X}$$

$$\Rightarrow Var(\hat{\beta}_0 + 0.8\hat{\beta}_1)$$

$$= Var(\hat{\beta}_0) + 0.64 Var(\hat{\beta}_1) + 1.6 Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$$

$$= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n SS_X} + 0.64 \frac{\sigma^2}{SS_X} - \frac{1.6 \bar{X} \sigma^2}{SS_X}$$

$$= \frac{\sigma^2}{SS_X} \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} + 0.64 - 1.6 \bar{X} \right]$$

三、有關於汽車碳氫化合物排放量 (克/英里) 的研究，記錄碳氫化合物排放量 Y (100 克/公里)，和相對應的累積里程數 X (以 1000 公里為單位)。初步整理樣本資料如下所示：

$$n=11, \sum_{i=1}^n x_i = 190.2356, \sum_{i=1}^n y_i = 212.9375, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 4086.6461,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = 4152.344, \sum_{i=1}^n x_i y_i = 3808.8281。$$

使用以上資料回答下列問題，請詳細將所使用之公式及計算過程列出。(每小題 9 分，共 36 分)

(一) 計算最小平方迴歸線。(計算至小數點後 4 位數)

(二) 迴歸判定係數 (R^2) 為何？

(三) 顯著水準為 0.05，檢定迴歸斜率是否顯著異於 0.16。

(四)在 $x=25$ 時，求對應之反應變數 Y 預測值的 95% 預測區間。

$$(t_{10,0.025} = 2.228, t_{9,0.025} = 2.262, t_{10,0.05} = 1.812, t_{9,0.05} = 1.833)$$

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考迴歸係數的估計與檢定
3. 《命中特區》：吳迪著”統計學” P10-3~P10-17

【擬答】：

$$(\rightarrow) \hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

$$1. \hat{\beta}_1 = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = \frac{3808.8281 - \frac{190.2356 \times 12.9375}{11}}{4086.6461 - \frac{190.2356^2}{11}} = 0.1585$$

$$2. \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = \frac{212.9375}{11} - 0.1585 \times \frac{190.2356}{11} = 16.6168$$

$$\Rightarrow \bar{Y} = 16.6168 + 0.1585X$$

(二)

$$SST = SS_Y = 4152.344 - \frac{212.9375^2}{11} = 30.3096$$

$$SSR = \hat{\beta}_1^2 SS_X = 0.1585^2 [4086.6461 - \frac{190.2356^2}{11}] = 20.0145$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{20.0145}{30.3096} = 0.6603$$

(三)

$$MSE = \frac{SSE}{n-2} = \frac{SST - SSR}{n-2}$$

$$= \frac{30.3096 - 20.0145}{11-2} = 1.1439$$

$$SS_X = 4086.6461 - \frac{190.2356^2}{11} = 796.76840$$

$$\{H_0: \beta_1 = 0.16$$

$$\{H_1: \beta_1 \neq 0.16$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\text{拒絕域} C = \{t | t > 2.262 \text{ 或 } t < -2.262\}$$

檢定統計量

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{MSE}{SS_X}}} = \frac{0.1585 - 0.16}{\sqrt{\frac{1.1439}{796.6840}}} = -0.0396 \notin C \Rightarrow \text{not ReHo}$$

結論：沒有證據顯示迴歸斜率顯著異於 0.16

(四) $X=25$ 代入得

$$\hat{Y} = 16.6168 + 0.1585 \times 25 = 20.5793$$

$$\text{且 } \bar{X} = \frac{190.2356}{11} = 17.2941$$

$X=25$ 時 Y 預測值 95% 之預測區間

$$(\hat{Y}_{X=25} \pm t_{0.025}(9) \sqrt{MSE [1 + \frac{1}{n} + \frac{(X-\bar{X})^2}{SS_X}]})$$

$$\Rightarrow (17.2941 \pm 2.262 \sqrt{1.1439 [1 + \frac{1}{11} + \frac{(25 - 17.2941)^2}{796.6840}]})$$

$$\Rightarrow (14.6823, 19.9059)$$



志光 保成 學儒

我連過 3 榜!

>>> 跟著老師上課的進度走
很快地就可以把所有內容讀熟，順利上榜!

<電子學>一開始的基本觀念建立都是跟老師的課開始，將老師提供的筆記多次反覆的來抄寫背誦，基本上就有機會對大部份考題略懂。
<基本電學>及<電子學>筆記就照著老師板書寫的抄寫下來，熟讀筆記內容，接著就是不停地算題目，課本、題庫班的題目算熟，考試時會用到的觀念基本都在筆記以及題庫班中。

洪○銓

2狀元 & 1榜眼

111年高考電子工程 全國狀元

111年鐵路特考高員級電子工程 全國狀元

109年普考電子工程 全國榜眼.應屆考取

四、觀察記錄某一城市在最近三個月內（90 天）每天汽機車意外事故的次數，其次數分配如下所示：

意外事故次數	0	1	2	3	4
觀察天數	32	34	17	6	1

檢定每天汽機車意外事故次數是否服從波松（Poisson）分配。

- (一)寫出虛無假設與對立假設。(5 分)
 - (二)在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 時，寫出檢定統計量、棄卻域和結論。(須列出計算過程) (15 分)
- $(x_{2,0.025}^2 = 7.38, x_{3,0.025}^2 = 9.35, x_{4,0.025}^2 = 11.14,$
 $x_{2,0.05}^2 = 5.99, x_{3,0.05}^2 = 7.81, x_{4,0.05}^2 = 9.49)$

波松分配累積機率表

x	$\lambda = E(X)$		
	0.5	1.0	2.0
0	0.607	0.368	0.135
1	0.910	0.736	0.406
2	0.986	0.920	0.677
3	0.998	0.981	0.857
4	1.000	0.996	0.947
5	1.000	0.999	0.983
6	1.000	1.000	0.995
7	1.000	1.000	0.999

- 1. 《考題難易》：★
- 2. 《解題關鍵》：考無母數適合度檢定, 基本題
- 3. 《命中特區》：吳迪著”統計學” P12-3~P12-4

【擬答】：

(一) $\begin{cases} H_0 : \text{資料服從波松分配} \\ H_1 : \text{資料不服從波松分配} \end{cases}$

$$(\text{二}) \bar{X} = \frac{0 \times 32 + 1 \times 34 + \dots + 4 \times 1}{90} = 1$$

因為 $\hat{\lambda}_{MLE} = \bar{X} = 1$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \frac{e^{-1}}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

次數	0	1	2	3	4
O_i	32	34	17	6(7)	1
p_i	0.368	0.368	0.184	0.061	0.015
$O_i = np_i$	33.12	33.12	16.56	5.49	1.35

(6.84)

$\alpha = 0.05$

拒絕域 $C = \{\chi^2 | \chi^2 > \chi_{0.05}^2(2) = 5.99\}$

檢定統計量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(32 - 33.12)^2}{33.12} + \dots + \frac{(7 - 6.84)^2}{6.84}$$

$$= 0.077 \notin C \Rightarrow \text{not } R_0 H_0$$

結論：沒有證據顯示資料不服從波松分配



志光 保成 學儒 陪你

站上工科巔峰

電力工程

電子工程

機械工程

資訊處理

<p>【全國狀元】 111 高 考 電子工程 洪○鈺</p> <p>【全國榜眼】 111 普 考 資訊處理 羅○昌</p> <p>【台北市榜眼】 111 地特三等 電子工程 郭○瑞</p> <p>【台北市榜眼】 111 地特四等 電力工程 張○境</p> <p>【金門縣榜眼】 111 地特三等 資訊處理 李○杰</p> <p>【台北市探花】 111 地特四等 電子工程 楊○榮</p> <p>【高雄市探花】 111 地特四等 電子工程 何○宇</p> <p>【全國第五】 112 初 等 考 電子工程 陳○豪</p>	<p>【台北市第五】 111 地特三等 電子工程 薛○文</p> <p>【全國第七】 111 普 考 電子工程 卓○倫</p> <p>【全國第八】 111 高 考 機械工程 江○禾</p> <p>【全國第八】 111 普 考 電力工程 陳○璋</p> <p>【全國第八】 111 普 考 電子工程 李○穎</p> <p>【台北市第八】 111 地特四等 資訊處理 吳○進</p> <p>【全國第九】 111 普 考 機械工程 施○佑</p>
---	---

各類考試優秀考取

高考電力工程 丁○翔; 高考電力工程 陳○璋; 普考電力工程 梁○豐; 普考機械工程 金○璋; 高考資訊處理 陳○廷; 普考資訊處理 吳○翰; 普考資訊處理 褚○華
 高考電力工程 王○商; 高考電力工程 曾○倫; 高考電子工程 王○榕; 高考資訊處理 于 ○; 高考資訊處理 陳○明; 普考資訊處理 李○庭; 普考資訊處理 劉○廷
 高考電力工程 吳○哲; 高考電力工程 葛○宇; 高考電子工程 卓○倫; 高考資訊處理 李○庭; 高考資訊處理 曾○瑄; 普考資訊處理 張○偉; 普考資訊處理 劉○銘
 高考電力工程 吳○璿; 高考電力工程 蔡○昇; 高考電子工程 莊○雪; 高考資訊處理 胡○紘; 高考資訊處理 黃○迪; 普考資訊處理 張○慧; 普考資訊處理 鄭○然
 高考電力工程 吳○聯; 高考電力工程 蔡○鎮; 普考電子工程 馮○恩; 高考資訊處理 張○偉; 高考資訊處理 廖○仲; 普考資訊處理 陳○明; 普考資訊處理 賴○全
 高考電力工程 李○淵; 高考電力工程 鄭○駿; 普考電子工程 蔣○霖; 高考資訊處理 許○傑; 高考資訊處理 劉○廷; 普考資訊處理 陳○堂; 地特三等 資訊處理 龍○穎
 高考電力工程 席○棠; 普考電力工程 吳○哲; 普考機械工程 黃○榮; 高考資訊處理 郭○哲; 高考資訊處理 賴○全; 普考資訊處理 曾○瑄; 初 等 考 電子工程 楊○榮
 高考電力工程 梁○豐; 普考電力工程 吳○璋; 普考機械工程 江○禾; 高考資訊處理 郭○楷; 高考資訊處理 羅○昌; 普考資訊處理 黃○迪; 初 等 考 電子工程 楊○文

版面有限 無法一一刊登